中学数学课改的十个论题

课改需要循序渐进的持续努力；实践基础上的理论概括是可行之道；理解数学、理解学生、理解教学是三大基石.

章建跃(人民教育出版社中学数学室)

自2004年高中课标教材进入试验区实验以来，我们进行了大量跟踪调研，发现了一些带有普遍性的问题. 经过整理，归纳出如下论题.

序言:数学教改的基本共识

在课改过程中，我们对数学教学涉及的各环节及相关问题都进行了全方位的反思和讨论，提出了各种各样的观点，从中可以概括出一些基本共识：

教学目标——全面关注学生的认知、能力和理性精神，强调以学生最近发展区为定向，促进学生全面、和谐、可持续发展，为学生的富有个性的发展奠定必须的数学基础，其实质仍然是“数学育人”；

教学内容——强调概念及其反映的思想方法教学的重要性，注重知识的联系与综合，反对“数学教学＝解题教学＝题型教学＝技巧训练”的现象；

教学要求——个性差异与统一要求的辩证统一，这是历来强调的，但以前偏重统一性，现在强调以个性差异为出发点和基础；

教学设计——不仅内容的教学需要预设提问、讲授、训练等，而且特别强调课堂“生成”，设计能引发学生独立思考、自主探究的“开放性问题”，乃至强调“看过问题三百个，不会解题也会问”；

教学方法——强调讲授、问答、训练的综合，不再是单一的讲授或活动，是教师主导取向的讲授式和学生自主取向的活动式的融合，强调“启发式教学”的核心地位；

学习方式——接受与探究的融合，强调学生学习的主动性、积极性，注重独立思考和合作学习的结合；

教学过程——以知识的(自然、水到渠成)发生、发展过程为载体的学生认知过程，以学生为主体的数学活动过程，强调学生数学思维的展开、深度参与(教学的有效性)；

教学评价——强调发挥评价对改进教师的教、学生的学的作用，作为教师根据教学进程进行教学反馈、调节，以及学生通过自我监控调节学习进程的依据，重视形成性评价；

教学媒体——以信息技术与数学教学整合为焦点，追求“必要性”“平衡性”“广泛性”“实践性”“有效性”，服务于数学概念、原理的实质理解，做纸笔所不能做的事.

这些共识就是被广大教师普遍接受的新理念. 从中可见，“新理念”并不是对“旧理念”的抛弃，而是对“旧理念”的扬弃，是继承与发展的统一，而且有许多教育思想(例如“教学应该实行启发式，反对注入式”)是常新的、永不过时的. 教育领域中，“全新理念”不能用来指导教改实践.

总之，“新理念”就是要在教育领域落实科学发展观，使学生得到全面、和谐与可持续发展.

值得指出的是，上述共识许多都是常识. 但常识往往被人们忘记. 回顾我国在世纪之交开始的这场以课程改革为核心的教育改革，可以发现这些共识来之不易，人们的思想回归常识也经历了一个曲折的过程. 从教育改革的理念层面看，本次改革确实解放了人们的思想；对我国数学教育传统的批判许多都是切中要害的；更重要的是引发了人们的新思考，促使人们更进一步地考虑数学教育中的深层次问题；关注学生的个性基础，强调发挥学生的主体性，促进学生积极主动地学数学等，也是与时代发展对数学教育的新要求合拍的，有利于培养高素质人才；等等. 但是，因为学生的成长过程没有重复的机会，所以教育改革应该敢想而谨慎地干，切忌蛮干，看准的问题也只能逐步地改，只能是在已有发展基础上的深入，否则一定会陷入低层次的折腾.

从教改的发展现状看，关键还是将先进理念具体化，变成具有可操作性的行动指南，落实在课堂教学

中,体现在教师的日常教学行为上.

1 "理解数学"是当好数学教师的前提

数学水平高的人不一定能教好数学,但好的数学教师一定有好的数学功底,这是毋庸置疑的.在数学教师的知识结构中,第一要素是"数学素养",其主要内涵是:了解数学知识的背景,准确把握数学概念、定理、法则、公式等的逻辑意义,深刻领悟内容所反映的思想方法,具有挖掘知识所蕴涵的科学方法、理性思维过程和价值观资源的能力和技术,善于区分核心知识和非核心知识等.

从我们的调研结果看,尽管现在中学数学教师的学历达标率较高,还有许多数学教师具有硕士、博士学位,但总体而言,对中学数学课程中的内容及其反映的思想方法的理解水平仍有很大的提高空间.

例1 如何理解三角函数诱导公式?

人们一般从"三角恒等变换"的角度理解三角函数诱导公式,把它当成是"将任意角的三角函数转化成锐角三角函数"的工具.教科书也是这么表述的:"对于0°到360°范围内非锐角的三角函数,能否转化成锐角三角函数呢?如果能,转化公式是什么?"[1]教学中,因为诱导公式太多,学生记不住,教师又将之进一步概括成为"奇变偶不变,符号看象限".实践表明,教学效果总不尽如人意.什么原因呢?

笔者认为,原因首先在于对"诱导公式"本质的理解的偏差."其实,$x=\cos t$ 和 $y=\sin t$ 是单位圆的自然的动态(解析)描述.由此可以想到,正弦、余弦函数的基本性质就是圆的几何性质(主要是对称性)的解析表述."[2]因此,诱导公式本质上是圆的旋转对称性和轴对称性的解析表述.也就是说,它是三角函数的一条性质——对称性,其几何背景是圆的旋转对称性.这样,我们就可以按如下方式设计诱导公式的教学:

先行组织者:三角函数刻画了单位圆上点的变化规律,可以想象,它的基本性质与圆的几何性质有内在联系.我们知道,圆的最重要的性质就是它的对称性,例如,以圆心为对称中心的中心对称图形,以任意直径为对称轴的轴对称图形等.这种对称性反映了三角函数的什么性质呢?

问题1:已知 α 与 β 为任意角.如果 α 的终边与 β 的终边关于原点对称,那么它们有什么关系?它们的三角函数又有什么关系?($\beta=2k\pi+\pi+\alpha$,由于 α 的终边、β 的终边与单位圆的交点关于原点对称,因此 $\sin\beta=\sin(2k\pi+\pi+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$)

问题2:类似地,如果 α 的终边与 β 的终边关于 x 轴对称,它们有什么关系?它们的三角函数又有什么关系?关于 y 轴、或关于直线 $y=x$、或关于直线 $y=-x$ 对称呢?

归纳总结:从联系的观点看,上述问题可以归结为两类变换:

(1)关于 x 轴的轴对称变换 $T_1:\theta\to-\theta$,单位圆上的点 (x,y) 经 T_1 变为 (x_1,y_1),有 $(x_1,y_1)=(x,-y)$,也就是 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$,$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$;

(2)将 α 的终边绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 的旋转变换 $T_2:\theta\to\frac{\pi}{2}+\theta$,单位圆上的点 (x,y) 经 T_2 变为 (x_2,y_2),有 $(x_2,y_2)=(-y,x)$,也就是 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$,$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

在上述两种变换下,我们可以得到所有诱导公式.例如,经过两次 T_2 变换,就有 $\alpha\to\pi+\alpha$,于是

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,$$

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

经过一次 T_1 变换,再经过一次 T_2 变换,就有 $\alpha\to-\alpha\to\frac{\pi}{2}-\alpha$,于是

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

其余可以类推.显然,在单位圆定义下,用对称变换的思想研究诱导公式,确实使问题简单了.事实上,所有三角公式都可以这样来认识:终边相同的角的三角函数就是旋转 2π 的整数倍的旋转变换;诱导公式就是变换 T_1、T_2 及其合成;和(差)角公式就是旋转任意角的旋转变换.

2 课堂教学的高立意与低起点

随着人教版初中、高中数学课标教材的推广,笔者有机会深入课堂,进行了大量的教学观察和研讨.总体印象是:课堂教学的品味不高是普遍性的,许多教师的"匠气"十足,一切围绕高考转,以题型教学、技巧训练代替数学教学,功利化色彩浓厚,缺少起码的思想、精神追求,极大地损害了数学的育人功能.因此,提高课堂教学的品味是当务之急.

笔者认为,只有充分地挖掘数学知识蕴涵的价值观资源,并在教学中将知识教学与价值观影响融为一体,才能真正体现"数学育人".其中,至关重要的是要提高课堂教学的思想性.在课堂教学实践上,要做到"高立意,低起点".

例2 "不等式基本性质"教学设计的立意比较.

以往的做法:从"数轴上点的顺序定义数的大小

关系"出发，给出"基本事实"，指出由这些基本事实可以看到，"考察两个实数的大小，只要考察它们的差"；

以"利用比较实数大小的方法，可以推出下列不等式的性质"为引导，以"性质—证明—例题—练习—习题"为模式，逐次展开性质1～性质8的讲解.

"人教A版"的做法：首先，从"数轴上点的顺序定义数的大小关系"出发，给出"基本事实"，并指出"考察两个实数的大小可以统一化归为比较它们的差与0的大小"；

第二步，从"数及其运算"的高度出发，以等式的基本性质为起点，以"运算中的不变性、规律性就是性质"为指导思想，通过类比等式的基本性质，得到不等式基本性质的猜想；

第三步，回到从"基本事实"到"基本性质"的推理过程，给出证明；

第四步，引导学生用不同语言表述"基本性质"；

第五步，从实例中概括基本不等式的作用——明确概括出思想方法.

比较后可以发现，以往教材实际上是一个"公理化系统"，其逻辑性是严谨的，但逻辑背后的思想并没有得到揭示."人教A版"将不等式与等式一起纳入"数及其运算"的系统中，明确了基本思想，即"运算中的不变性、规律性"成为用运算律推导出的"基本性质"，并且以等式的基本性质为起点，通过类比归纳出不等式的基本性质，然后再给予逻辑证明.这样做的目的就是要"既讲逻辑，又讲思想"，从而加快学生领悟思想的进程.

根据上述意图，对本课的教学做如下设计：

先行组织者：解方程要以等式的基本性质为依据，解决不等式的问题要以不等式的基本性质为依据.因此我们先来研究不等式的基本性质.与等式的基本性质一样，不等式的基本性质也是数、式在运算中的规律性的表现，因此可以类比等式的基本性质的研究经验.

问题1：请叙述等式的基本性质.

(在学生叙述的过程中，教师通过板书，突出"加""减""乘""除"及"不变"等表述)

问题2：讨论等式的基本性质的思想方法.

(通过讨论得到：考察"运算中的不变性")

问题3：类似地，你能猜想一下不等式的基本性质吗？

问题4：阅读教科书，看看还有哪些性质没有想到？

(其中，$a>b \Leftrightarrow b<a$；$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$ 等，学生不容易想到，可以通过看书完善)

问题5：请你根据"基本事实"证明自己的猜想.

问题6：你能总结一下等式的基本性质和不等式的基本性质蕴涵的数学思想方法吗？

3 大力提高概念教学的水平

概念是思维的细胞；"数学根本上是玩概念的，不是玩技巧.技巧不足道也！"[3]因此我们必须十分重视基本概念的教学，在核心概念的教学上更要做到"不惜时，不惜力".然而，当前不重视概念教学是一个比较普遍的现象."一个定义，三项注意"式的抽象讲解，在学生对概念还没有基本理解的时候就要求学生进行概念的综合应用，许多教师甚至认为教概念不如多讲几道题目更实惠.更令人担心的是，有些教师不知如何教概念.这一问题必须引起我们的充分重视.

从教育与发展心理学的观点出发，概念教学的核心就是"概括"：将凝结在数学概念中的数学家的思维活动打开，以若干典型具体事例为载体，引导学生展开分析各事例的属性、抽象概括共同本质属性、归纳得出数学概念等思维活动而获得概念.数学教学要"讲背景，讲思想，讲应用"，概念教学则要强调让学生经历概念的概括过程.由于"数学能力就是以数学概括为基础的能力"[4]，因此重视数学概念的概括过程对发展学生的数学能力具有基本的重要性.

一般而言，概念教学应该经历如下几个基本环节：

(1)背景引入；

(2)通过典型、丰富的具体例证(必要时要让学生自己举例)，引导学生开展分析、比较、综合的活动；

(3)概括共同本质特征得到概念的本质属性；

(4)下定义(用准确的数学语言表达，可以通过看教科书完成)；

(5)概念的辨析，即以实例(正例、反例)为载体，引导学生分析关键词的含义，包括对概念特例的考察；

(6)用概念作判断的具体事例，这里要用有代表性的简单例子，其目的是形成用概念作判断的具体步骤；

(7)概念的"精致"，主要是建立与相关概念的联系，形成功能良好的数学认知结构.

概念教学要注意以下一些基本问题：[5]

第一，概念(特别是核心概念)教学中，要把"认识数学对象的基本套路"作为核心目标之一；

第二，数学概念的高度抽象性，决定了对它的认识过程的曲折性，不可能一步到位，需要一个螺旋上升、在已有基础上再概括的过程；

第三，人类认识数学概念具有"渐进性"，个体对数学概念的认识要"重演"人类的认识过程，因此学习像函数这样的核心概念，需要区分不同年龄阶段的概括层次(如变量说、对应说、关系说等)，这也是"教学与学生认知水平相适应"的本意所在；

第四，为了更有利于学生开展概括活动，例子的

选择至关重要，而且要重视让学生自己举例子，“一个好例子胜过一千条说教”；

第五，“细节决定成败”，必须安排概念的辨析、精致的过程，即要对概念内涵进行“深加工”，对概念要素作具体界定，让学生在对概念的正例、反例做判断的过程中，更准确地把握概念的细节；

第六，在概念的系统中学习概念，即要通过概念的应用，形成用概念作判断的“操作步骤”的同时，建立相关概念的联系，这是一次新的概括过程.

例 3 “直线的倾斜角与斜率”的教学设计.

下面呈现的设计思路以之前讲了“解析几何序言课”为前提. 在“序言课”中，已经介绍了笛卡儿发明了坐标系，用有序数对(x,y)表示点，用方程表示曲线，从而把几何研究转化成为对应的代数研究等. 一句话，通过序言课，学生已经从宏观上了解了解析几何的基本思想方法.

本课是学生按解析几何的“基本套路”解决问题的首次实践，也就是要以直线为载体，学习坐标法——将几何语言转化成代数符号语言，这里有建立“基本规范”的重要任务，具体过程如下：

先行组织者：前面已经讲过解析几何的基本思想方法，谁能帮助大家回忆一下？

在学生叙述的基础上强调：今天开始我们就来实践一下坐标法. 先从最简单的直线开始. 大家要记住，我们在平面上建立了一个直角坐标系，解析几何的特点就是以直角坐标系为工具研究问题.

倾斜角概念的获得：

问题 1：经过一点 P 的直线有无数条，怎样借助直角坐标系把它们区分开来呢？

设计意图：让学生感受引入倾斜角的必要性；突出坐标系的作用.

活动预设：教师可以用“几何画板”演示直线束，学生观察并提出解决方案. 教师可以边演示边启发：以坐标系为“基准”，过 P 点的这些直线与坐标系有什么不同的关系？

待学生发现可以用角作区分后再提出：

问题 2：用直线与 x 轴所形成的角作区分标准比较符合我们的习惯. 但这里有四个角，取哪个角呢？请说出选择的理由.

设计意图：让学生了解如何从坐标轴的“基准”作用出发思考问题、做出选择.

活动预设：学生可能会有不同的选择.

在学生活动的基础上，教师讲解：坐标系是由原点重合的两条相互垂直的数轴确定的，数轴有方向，所以在选择时要注意发挥这个方向的作用. 如图 1，以 x 轴的正向为基准，作为角的一边，以射线 AP（直线向上的方向）为角的另一边，我们把这个角叫做直线的倾斜角. 当然，选择其他三个角也可以，不过不好，这一点可以在后续的学习中看到.

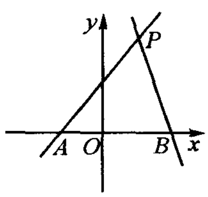


图 1

问题 3：由定义，倾斜角的取值范围是什么？能表示经过 P 点的所有直线吗？

设计意图：辨析概念；使概念完备.

活动预设：让学生说出取值范围，并补充直线平行于 x 轴时的情况.

教师可以做说明性讲解：直线平行于 x 轴时，为什么不把它的倾斜角定义为 180° 呢？实际上这也是为了简单，便于计算. 这样，倾斜角的取值范围是$0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$.

斜率概念的获得：

问题 1：倾斜角是在直角坐标系下刻画直线倾斜程度的一个量，但这是用几何方法刻画的. 能否将它转化为代数方法来刻画呢？在我们的已有经验中有没有刻画倾斜程度的数量？

设计意图：唤醒坡度知识，类比坡度引入斜率概念.

活动预设：引导学生回顾“坡角”“坡度”这两个描述倾斜程度的量的意义及其关系，类比“坡度是升高量与前进量的比值，即为坡角的正切值”，引进一个量：直线倾斜角 α 的正切值 $k=\tan\alpha(\alpha\neq 90^\circ)$，给出斜率概念.

问题 2：一般地，定义了一个数学新对象，就要从各种角度去认识它. 这里我们可以从斜率 k 的取值范围、与倾斜角 α 的关系等方面进行更细致的认识. 你能说说自己的理解吗？

设计意图：辨析概念. 通过比较直线的倾斜角与斜率的各自特点，突出斜率是对直线倾斜程度的代数刻画，是解析几何的本质.

活动预设：先让学生思考、回答，最后归纳出：倾斜角和斜率分别从几何与代数两个角度刻画了直线的倾斜程度，斜率是一个数量；与频率、比率等类似，斜率中的“率”是指两个相关量的比值；由于 $0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ$，所以 k 可以取任意实数；给定一条直线，倾斜角唯一确定，但斜率要分 $\alpha\neq 90^\circ$ 和 $\alpha=90^\circ$ 两种情况；等等.

斜率公式的获得：

问题 1：平面几何中有“两点确定一条直线”，直线能由两点确定，那么它的倾斜角、斜率也能由两点确定. 你能将这种几何语言转化为代数语言吗？自己举几个具体例子试一下.

设计意图：让学生经历“从几何到代数”的转化过程. 让学生通过自己举例获得建立斜率公式的直接经验.

活动预设：学生举例、展示. 要得到：给定直线上两点的坐标 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，那么直线的倾斜

（下转第 11 页）

APOS理论及其对数学概念教学的启示

石雪梅　罗新兵(陕西师范大学数学与信息科学学院)

数学概念教学是数学教学的一个重要组成部分.数学概念学习主要有两种学习方式,即概念形成和概念同化,相应地形成了两种教学方式.美国数学家杜宾斯基根据他对高等数学思维的研究,基于皮亚杰的关于个体思维的反思性抽象理论,提出了数学概念学习的APOS理论,这一理论既注重学生的直接经验,又注重学生的心理建构,对数学概念的教学设计有着积极启示.

1　APOS理论简介

杜宾斯基认为,学生学习数学概念需要进行心理建构,只有在自身已有知识、经验的基础上,主动建构新知识的意义,才能达成理解.而这一建构过程涉及活动(action)阶段、程序(process)阶段、对象(object)阶段以及图式(scheme)阶段,取这四个阶段英文单词的大写首字母,记为APOS理论.

第一阶段——"活动阶段".杜宾斯基认为,"活动"是指个体通过一步步的外显性(或记忆性)指令去变换一个客观的数学对象.这里的活动泛指所有的数学活动,如操作、归纳、演绎、讨论等.由此可见,"活动"不仅涉及外显的行为操作,也涉及内隐的思维操作.所以,学生只有在活动过程中才能加深对知识的理解,俗语"眼过千遍,不如手过一遍"就是这个道理.同时,活动还能重现知识的发生发展过程,可以培养学生的数学探究能力和抽象概括能力.但是,在活动过程中不能丢掉数学的本质,不能"去数学化",活动的目的是为了更好地理解数学知识,因而在经历活动后,应及时将活动抽象上升到数学层面.以"圆的概念"教学为例,先要求学生自己试着作圆,通过操作,让学生直观感受圆的形成过程.

第二阶段——"程序阶段".从事数学活动是为了让学生获得数学活动的体验,感受数学概念的直观背景及概念之间的关系,对概念形成初步认识,但这种认识并不是也不能一直停留在这个层面.当这种"活动"经过多次重复而被个体熟悉后,就可以内化为一种称之为"程序"的心理操作,这时对概念的学习不再

(上接第5页)

角和斜率都能由这两个点的坐标确定.教师也可以举例,例如:如图2,已知点$A(1,3)$,$B(3,1)$,$C(6,7)$,$D(3,7)$,试求直线AB、BC、CD、DA的斜率和倾斜角.

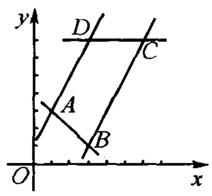


图2

问题2:如图3,已知点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$,求直线P_1P_2的斜率.

设计意图:让学生自主探究得到斜率公式.

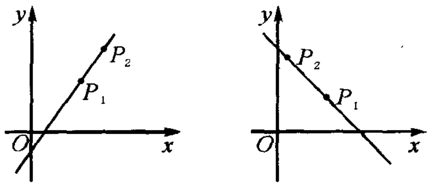


图3

追问:(1)如果直线$P_1P_2\parallel x$轴,上述结论还适用吗?为什么?(2)如果直线$P_1P_2\parallel y$轴,上述结论还适用吗?为什么?

设计意图:通过对特例的讨论,完善对公式的认识.特别是将"倾斜角$\alpha=90°$时斜率不存在"与"直线$P_1P_2\parallel y$轴时$x_1=x_2$"接通.

小结:再一次归纳用坐标法刻画直线的基本套路:建立坐标系,以坐标表示点;用直线与x轴所形成的角——倾斜角区分过P点的直线;引进斜率表示倾斜程度;将几何条件翻译成代数表示——用直线上两点的坐标表示斜率;注意对与x轴平行、垂直时的分析和讨论.

特别要注意直角坐标系的工具作用:用角区分过一点的直线时,利用了x轴及它的正方向,x轴就是一个基准,一个参照系,这样讨论问题就有了一个统一的标准.

倾斜角是用来刻画直线在直角坐标系中倾斜程度的量.

引进"斜率"是为了把倾斜角"代数化",这样就借助代数运算来研究几何问题了,这是坐标法的本质.

斜率$k=\tan\alpha(\alpha\neq 90°)$是一个数,是刻画直线在直角坐标系中倾斜程度的量.它有一个缺点,就是不能表示与x轴垂直的直线.倾斜角为90°的直线的斜率不存在,这时只能单独处理.

(未完待续)

课改需要循序渐进的持续努力；实践基础上的理论概括是可行之道；理解数学、理解学生、理解教学是三大基石.

中学数学课改的十个论题(续)

章建跃(人民教育出版社中学数学室)

4 什么叫“抓基础”

抓“双基”是我国数学教学的优势，但这个优势正在丧失.其中的原因多种多样，但对“怎样做才是真正的抓基础”的认识不到位是主要原因之一.当前，课堂教学演变为“题型教学”，题型教学又进一步蜕化为“刺激——反应”训练的状况非常令人忧虑.有些教师往往用例题教学替代概念的概括过程，认为“应用概念的过程就是理解概念的过程”.殊不知没有概括过程必然导致概念理解的先天不足，没有理解的应用是盲目的应用，结果不仅事倍功半，而且对概念的死记硬背和对解题的机械模仿必然导致“功能僵化”，学生面对新情境时无法透过现象看本质，难以实现概念的正确、有效地应用，质量和效益都无保障.有的教师试图通过“题型教学”穷尽“题型”，幻想通过“题型”的机械重复、强化训练，让学生掌握对应的“特技”和“动作要领”而提高考试分数.对具有普适意义的、迁移能力强的“根本大法”——数学思想方法的教学，却因其不是“立竿见影”而得不到重视.

为了真正体现“双基”教学的思想，应当提高对“抓基础”的认识水平：

第一，要强调基本概念教学的重要性，重视基本概念蕴涵的智力开发价值，主要是要充分挖掘基本概念蕴涵的数学思想方法的教育价值，“无知者无能”——学生的数学能力不强的主要根源在于没有掌握数学基本概念及其联系方式；

第二，要让学生养成“不断回到概念中去，从基本概念出发思考问题、解决问题”的习惯；

第三，要加强概念联系性的教学，从概念的联系中寻找解决问题的新思路——解题的灵活性并不来自于“题型＋技巧”，而是来自于概念联系通道的顺畅.

“基础”是发展的“根”和“本”，根深才能长成参天大树，本固才能立于不败之地.

例4 “等差数列前n项和公式”的教学思考.

大多数教师都认为，“倒序求和”是这一内容蕴涵的思想方法，另外还要构建“梯形钢管堆的计数”“梯形面积公式”等模型来体现数形结合.因此，从基础的角度看，就是要让学生掌握求和公式及其变式，学会“倒序求和”的思想方法.

不过，在笔者看来，“倒序求和”并不是什么思想方法，它是为了避免对项数n进行奇偶讨论而引入的一个技巧.这一内容的基础性应该体现在下面两个方面.

目标：用等差数列的“基本量”$\{a_1,d,n\}$或$\{a_1,a_n,n\}$表示前n项的和S_n；

思想方法：用等差数列的性质“等差数列$\{a_n\}$中，当$m+n=p+q$时，$a_m+a_n=a_p+a_q$”，将不同数求和化归为相同数求和，从数量关系上看是利用了“平均数”概念；

更进一步地，为了体现从概念出发思考和解决问题的思想，利用等差数列的概念和通项公式$a_m=a_1+(m-1)d$，可得$S_n=na_1+d[1+2+\cdots+(n-1)]$，所以实质是求$1+2+\cdots+(n-1)$.

所以，本课可以这样设计：

第一步，从“高斯的故事”引入；

第二步，归纳“高斯方法”的本质，即实质是利用$1+100=2+99=\cdots$，将不同数求和化归为相同数求和；

第三步，用这一方法求$1+2+\cdots+n$的值，引出需要分n为奇数、偶数讨论的问题，并求出和；

第四步，过渡到利用$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$求等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和的公式.

这是一种聚焦基本概念和基本原理，引导学生经

历从特殊到一般的归纳过程,从中领悟"化归"的思想方法的思路.

值得注意的是,教学中不必急于引入"倒序求和"的技巧.我们可以在讨论 n 的奇偶性而得出求和公式后,再让学生思考"能否想个办法避免讨论",把公式 $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ 变形为 $2S_n=n(a_1+a_n)$,再联系性质得到.

总之,从加强基础考虑,应把"等差数列前 n 项和公式"看成是等差数列概念、性质的应用课.这一课的教学,重要的是要培养学生从基本概念、基本原理出发思考问题的习惯.具体教学时,应在明确任务(即用基本量 a_1,d,n(或 a_1,a_n,n)表示 S_n)的基础上,引导学生从基本性质、通项公式入手,寻找化归的方法,在不断"求简"中得到"倒序求和".

顺便提及,在等差数列 $\{a_n\}$ 中,看看 $a_1=1,d=1$ 这一特例,考查它与一般等差数列的关系,不难发现:最简单、最本质的等差数列就是 $1,2,3,\cdots,n,\cdots$,其他都是它的"变式"——a_1 代表不同"起点",d 代表不同"步长".研究等差数列时,想想自然数的性质是很有启发的.

5 怎样才是真正"教完了"

当我们强调课堂教学中要让学生经历概念的发生过程时经常会听到,"如果这样教,能教得完吗?"于是就给学生吃"压缩饼干",基础知识教学搞"一个定义,三项注意",学生没有经历知识发生发展过程的机会,没有经过自己独立思考而概括出概念和原理的机会,解题教学搞"一步到位",在学生没有必须的认知准备时就要他们做高难度的题目.调研发现,这些问题有越来越严重的趋势.

在匆忙完成的基础知识教学中,教学的"准""简""精"都出问题:不"准"——或者是没有围绕概念的核心,或者教错了;不"简"——在细枝末节上下功夫,把简单问题复杂化了;不"精"——让学生在知识的外围重复训练,耗费学生大量的时间、精力却达不到对知识的深入理解.

例 5 函数概念的"注意事项".

在得到函数定义后,教师一般都会强调如下"注意事项":

第一,函数 $y=f(x),x\in A,y\in B$ 中,集合 A,B 都是数的集合;

第二,对于 A 中的任意一个数,在集合 B 中都有对应的元素——任意性;

第三,对于 A 中的任意一个数,在对应关系 f 的作用下,在 B 中都有唯一的数与之对应——唯一性;

第四,这种对应可以是一对一,也可以是多对一,但不能一对多;

第五,$y=f(x)$ 是一个整体,不是 f 与 x 的乘积,是一种符号,它可以是解析式,可以是图象,也可以是表格;

第六,自变量 x 所对应的函数值 y 的取值范围 $C=\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域,值域都是一个集合,且值域是集合 B 的子集;

第七,函数的三要素:定义域、值域和对应法则三者缺一不可,值域可由定义域和对应法则唯一确定.

"注意事项"很全面,似乎是"教完了",但学生理解多少呢?这样"教完"又有什么意义呢?当然,这样的教师还是负责任的,但这是"好心办坏事".在不适当的时候、用不适当的方法强调细节,结果只能把学生"教糊涂了".

"教完了"应该以学生是否理解教的内容为标准,以学生是否达到了课标规定的教学要求,特别是学生达到的数学双基的理解和熟练水平为标准(注意,双基包括数学概念、定理、公式、法则等以及由内容反映的数学思想方法),而不是教师在课堂上有没有把内容"讲完".

顺便提及,一方面大家都在喊"课时不够",另一方面却是两学年甚至是两学年不到就"教完"所有内容,用一年以上的时间进行高考复习.这样的做法,不仅导致学生的基础不扎实,缺乏可持续发展的后劲,而且还可能使学生形成死记硬背的不良学习习惯,陷学生于高考复习的机械操练,还容易导致学生厌恶学习.这种严重违背教育规律的状况必须得到纠正.

6 探究式教学的天时地利人和[6]

首先讲"天时".当今世界,经济全球化和知识经济步伐不断加快.为了掌握21世纪社会经济发展的战略制高点,我国正竭力倡导从模仿创新转向自主创新,培育自身的科技原创力.相应地,要求教育"以培养学生的创新精神和实践能力为重点".因此,强调探究式教学顺应了我国社会经济科技发展的要求,大力加强探究式教学"适逢其时".

当然,也有我国社会转型期出现的急功近利对教育的侵害,应试教育实际上是教育领域的"GDP主义"——政府主管部门、家长、社会舆论仍以高考分数论英雄,并不问分数是以什么方式得到的.人们的理由是:优质教育资源就那么多,我必须让学生先拿到入场券,是否有利于学生的持续发展那是后话,顾不了这么多.因此"天时"并没有转化为探究式教学的有力条件.正如温家宝总理指出的,我们仍然是"重视认知教育和应试的教学方法,而相对忽视对学生独立思考和创造能力的培养",因此"中国培养的学生往往书本知识掌握得很好,但是实践能力和创造精神还比较

缺乏”.

其次看“地利”. 这里只针对学习内容是否适宜于探究而言. 一般地, 解题教学都应安排学生自主探究活动. 这里主要讨论数学基础知识的探究式学习问题. 应当说, 大部分数学概念、性质、法则、公式、定理等, 都适宜于用探究式学习方式. 显然, 数学思想方法在自主探究中起到关键作用, 但常常需要教师的启发引导.

例6 概念教学中如何体现“探究性”——以“曲线与方程”概念教学为例.

教学目标: (1)理解“曲线的方程”和“方程的曲线”的概念;

(2)体会由曲线的几何特征求曲线的方程的基本步骤;

(3)以简单的曲线与方程为载体, 在从方程研究相应曲线的性质的过程中, 体会坐标法的基本思想.

探究点的布设: 概念教学要自然、水到渠成, 要让学生体会引入概念的必要性、合理性, 要让学生掌握概念的内涵, 学会用概念进行判断. 所有这些都应建立在学生亲身体验的基础上. 这就是概念教学要强调学生的自主探究的理由. 因此, 在“曲线与方程”的概念教学中, 如何使学生建立起“纯粹性”“完备性”的充分体验, 就成为安排学生探究活动的重点. 具体的探究点是[7]:

(1)求曲线 C_1 的方程, 意图是辨析曲线与方程的关系, 曲线和方程的转化, 为归纳一般概念做铺垫;

(2)通过方程研究曲线的对称性, 意图是体会“曲线的方程”定义的合理性, 渗透坐标法的思想;

(3)在“曲线的方程”概念之后, 求给定曲线 C 的方程, 意图是强化对概念的理解, 体会求曲线的方程的步骤.

这样安排是为了在给出抽象概念之前, 以学生熟悉的“直线与方程”“圆与方程”为载体, 先经历较完整的“求曲线的方程——由方程讨论曲线的简单性质(对称性)”的过程, 并安排适当的反例进行辨析, 从中体会: 只有当曲线上点的集合与方程的解集之间具有一一对应关系时, 才能通过研究方程得到曲线的性质, 当完备性或纯粹性被破坏时, 就无法由方程得到曲线的性质.

教学过程:

问题或任务	问题解决(学生活动)	设计意图
圆心在原点, 半径为 r 的圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$. 圆上点的坐标与方程的解之间有怎样的联系?	圆上的点的坐标都是方程的解, 以方程的解为坐标的点都在圆上	由特殊的曲线与方程, 体会曲线上点的集合与方程解集的一一对应
圆 O 关于坐标轴和原点对称. 如何由方程研究圆的对称性?	设 (x,y) 满足方程, 如果 $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$ 也满足方程, 则曲线关于 x 轴、y 轴以及原点对称	体会通过方程研究曲线的性质的方法, 渗透坐标法的思想
曲线 C_1 是到 x 轴和 y 轴的距离相等的点的轨迹, 求它的方程, 并通过方程研究曲线的对称性	$(x,y)\in C_1\Leftrightarrow\|x\|=\|y\|\Leftrightarrow x^2=y^2$ (如果不是等价变形, 得到的方程可能是 $x=y$). 曲线 C_1 关于 x 轴、y 轴及原点对称	根据曲线上点的几何特征, 写出点的坐标 (x,y) 满足的方程, 再次体会坐标法的思想
曲线 C_1 上点的集合和方程 $x=y$ 的解集之间有怎样的关系? 由方程 $x=y$ 能得到曲线的对称性吗?	曲线上有些点的坐标不是方程的解, 以方程的解为坐标的点都在曲线上. 由 $x=y$ 不能得到曲线关于坐标轴的对称性	曲线 C_1 和方程 $x=y$ 满足纯粹性而不满足完备性. 体会这种情形由方程不能得到曲线的对称性质
曲线 C_2 是第一、三象限内到 x 轴和 y 轴的距离相等的点的轨迹, 求 C_2 的方程	$(x,y)\in C_2\Leftrightarrow\|x\|=\|y\|$, x,y 同号 $\Leftrightarrow x=y$. 如果疏忽 x,y 符号相同, 会得到错误方程 $x^2=y^2$	在化简方程时, 特别关注方程的同解性
曲线 C_2 上点的集合和方程 $x^2=y^2$ 的解集之间有怎样的关系?	曲线上点的坐标都是方程的解, 但以方程的某些解为坐标的点不在曲线上	提供一个曲线与方程满足完备性而不满足纯粹性的具体实例.
设 (x,y) 满足方程, 那么 $(x,-y)$ 和 $(-x,y)$ 都满足方程, 但曲线 C_2 关于坐标轴不对称, 这是为什么?	方程的解集中包含了不在曲线上的点	体会此时由方程得到的性质不是曲线所具有的
要想通过方程 $F(x,y)=0$ 研究曲线 C 的性质, 曲线上点的集合和方程的解集之间应满足什么关系?	曲线 C 上的点的坐标都是方程的解, 以方程的解为坐标的点都在曲线 C 上	归纳得出曲线的方程和方程的曲线的定义
曲线 C 是到两个坐标轴的距离的乘积为 1 的点的轨迹, 根据定义求曲线 C 的方程	在教师引导下学生完成, 强调以定义作为推理的依据(详细推理见表注)	由定义求方程, 强化对概念的理解, 体会求曲线方程的一般步骤

表注: 设曲线上任意一点的坐标为 (x,y), 根据曲线的特征得 $|x|\cdot|y|=1$, 这说明曲线上点的坐标都是方程 $|x|\cdot|y|=1$ 的解(满足完备性). 反之, 假设 (x,y) 是方程 $|x|\cdot|y|=1$ 的解, 则点 (x,y) 到两个坐标轴的距离的乘积为 1, 即点 (x,y) 在曲线上(满足纯粹性). 由定义得曲线 C 的方程为 $|x|\cdot|y|=1$. 由

$|x|\cdot|y|=1$ 有 $x^2y^2=1$，曲线 C 的方程的简化形式为 $x^2y^2=1$. 如果由 $|x|\cdot|y|=1$ 得到 $xy=1$，则曲线上位于第二、四象限的点的坐标不是方程的解(不满足完备性).

当然，并不是所有学习内容都适宜于探究，有的就不需要探究. 例如，数学中某些原始性的概念定义，没有多少"开放性"，不必探究，这样的内容，重要的是让学生了解来龙去脉，理解其引入的必要性、合理性，因此采用教师讲授或让学生看书的方式即可. 例如，直线与平面垂直的定义，通过生活中的事例，让学生感受到定义与自己的经验相吻合，从而确认其合理性，然后由教师叙述定义，这样安排教与学的过程是合适的. 这里，用"说得清道得明"的几何关系(即"直线与直线垂直")来定义"无法说清"的几何关系(即"直线与平面垂直")，这是一种公理化思想，教师必须向学生交代清楚，而学生则只要采用接受式学习方式即可. 而关于概念的名称、符号、某些规定(如 $0!=1$，$\mathbf{0}$与任意向量平行)等，直接告诉学生就可以.

再次看"人和". 探究式学习的"人和"，就是师生所共同营造的"探究氛围". 这种氛围，一方面有赖于学生"探究式学习的心向"，另一方面也有赖于教师的"探究型教学的意识". 如果学生缺乏"遇事问个为什么""打破沙锅问到底"的习惯和勇气，那么探究式学习就失去了内因；同样地，如果教师只注重给学生灌输现成的数学结论，不给学生独立思考、自主探究的机会，那么探究式学习也就失去了其生存的时间和空间. 当然，"人和"气象的出现，还需要一个位于学生思维最近发展区内的、蕴涵当前学习内容本质的问题情境，作为探究式学习的"引子""平台"，使探究式学习得以展开、深入，开花结果. 也就是说，课堂中的探究一般应当是一种"定向探究".

最后，学习是知与行相统一的主动行为，接受式和探究式是学习的两种基本形态. 以学生发展为本的教学，应体现接受和探究的相辅相成，要协调与平衡认知与情感、指导与自主、能动与受动、抽象思维与形象思维、动手实践与大脑意识活动、独立思考与合作交流等各种因素，进而使学习成为一个完整的认识过程.

有的教师说："我校生源差，反复讲还记不住，怎能让学生自主探究?"笔者的观点是：学生的数学成绩不好，是因为他还没有找到进入数学的大门，数学学习还没有开窍. 对于这部分学生，教师讲授是必要的，但更要注意数学学习方法的引导，而且"师傅领进门，修行在个人"，如果学生没有真正的独立思考、自主探索的机会，没有自己对数学知识的思维加工，总是停留在模仿、记忆的水平，那么他是不可能真正理解数学知识的. 所以，越是基础差的学生越要给他独立学习的机会，关键是要为他安排好学习的台阶，使他能循序渐进地学习，达到"积跬步以至千里"的效果. 例如，在例1中设计的教学过程，可能对基础薄弱的学生有困难，这时我们可以多安排几个台阶，先让学生探究比较容易的终边关于 x 轴对称的情况，而且从具体的角开始：

问题1：(1)设 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，如果 β 的终边与 α 的终边关于 x 轴对称，你能用 α 表示 β 吗? 这时 $\sin\beta$ 与 $\sin\alpha$，$\cos\beta$ 与 $\cos\alpha$ 有什么关系?

(2)请你自己举出类似的例子，看看有没有同样的结论?

(3)一般地，设 α 为任意角，β 的终边与 α 的终边关于 x 轴对称，用 α 表示 β，并求 $\sin\beta$ 与 $\sin\alpha$，$\cos\beta$ 与 $\cos\alpha$ 的关系.

问题2：(1)设 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，如果 β 的终边与 α 的终边关于 y 轴对称，你能用 α 表示 β 吗? 这时 $\sin\beta$ 与 $\sin\alpha$，$\cos\beta$ 与 $\cos\alpha$ 有什么关系?

(2)一般地，设 α 为任意角，β 的终边与 α 的终边关于 y 轴对称，用 α 表示 β，并求 $\sin\beta$ 与 $\sin\alpha$，$\cos\beta$ 与 $\cos\alpha$ 的关系.

问题3：设 α 为任意角，终边与 α 的终边关于原点对称的角，与 α 有什么关系? 它们的三角函数有什么关系?

上述过程就是一个从具体到抽象、逐步扩大开放度的问题系列，目的是先给学生一定的示范，再逐步放开思维空间，使"心动"与"行动"融合.

7 如何正确理解螺旋上升

在"模块化"的课程结构体系下，立体几何、解析几何、概率、统计等内容都采用"螺旋上升"的组织方式，对已经熟悉了"直线式"课程教材结构体系的广大教师确实形成了挑战. 到底应该如何看待螺旋上升问题呢?

首先，螺旋上升地安排数学内容，同一内容在不同阶段提出递进式学习要求是正确的，因为这样做既考虑到了教学与学生心理发展水平相适应的问题(因为"学习从属于发展")，同时也体现了数学概念的发展性. 特别是那些核心概念，因为它们在理解其他数学概念、联系不同领域的数学内容方面具有"固着点"作用和纽带作用，因此必须得到螺旋上升地再现. 例如，函数概念可以直观地用描述性语言表征(初中阶段)，也可以用集合对应的语言表征(高中阶段)，还可以用关系语言来表征(大学阶段). 数学概念在不同层次上的表征方式体现了人类对数学概念本质认识的深化过程，是螺旋上升地安排学习内容的主要依据之一.

其次，重要的数学思想方法必须得到“螺旋上升地重复”．我们知道，思想方法是由数学内容所反映的，属于“隐性知识”，有一定的“可以意会不可言传”的成分，需要经历“渗透——概括——应用”的学习阶段．这就需要教师有意识地安排——在概念教学中渗透、概括，在知识的联系中强化、应用．特别是在数学概念的“多元联系表示”中可以很好地体现“螺旋上升地认识数学思想方法”的重要意义．

第三，“螺旋上升”要体现“必要性”．如果学生的心理发展水平不够，还没有能力认识更多的细节、更本质的内涵，这时就要采用螺旋上升式；如果学生的能力已经达到了，就不应人为割裂认识的链条，更何况“学习能够促进发展”，教学既要与学生思维发展水平相适应，又要尽最大努力将思维的“最近发展区”转化为“现实发展水平”，例如，解析几何分为“必修”(直线和圆)和“选修”(圆锥曲线)似乎没有太大的必要．

第四，在构建课程体系时，应当以知识的前后逻辑连贯性、思想方法的一致性为前提．当前高中数学课标的模块化体系受到教师广泛批评的原因，一方面是其本身存在整体结构逻辑性差、知识不连贯性、螺旋设置不合理等；另一方面是初高中衔接不光滑，高中数学学习必备的基础知识有缺失，运算和推理的基本技能不过关等．一般地，整个中学数学课程体系上要螺旋上升，而在小系统上还是以“直线式”为好．

第五，“螺旋上升”可能带来的问题是简单重复学习，这是需要特别注意的．例如，当前的统计、概率内容安排，从小学低年级开始不断低水平重复，既浪费时间，同时也不符合随机数学的特点和学生认知发展规律．事实上，学习随机数学需要以辩证逻辑思维的发展为基础，而人的辩证逻辑思维在14周岁左右才有萌芽，整个青少年时期都发展不完善(有人甚至终身得不到完善发展)，因此，在初中三年级正式安排概率、统计的内容是合适的．小学阶段可以在算术中安排一点“平均数”的内容．

例7　“比例关系”及其反映的数学思想方法的螺旋上升式理解举例．

小学：分数、小数、百分数，渗透分数是两个数的商；理解比、比例的意义和性质，正比例、反比例的意义，用比例的知识解决简单问题；比例尺；等等．

初中：熟练运用比例列代数式，用比例进行几组数的比较——列方程、不等式等；正比例函数、反比例函数；线性函数；等等．在代数中，对“比例”完成“数——字母——变量”的螺旋上升的认识．

在长度、角度、面积等各种几何量的大小比较中应用比例思想，在度量单位的转换中体会比例的作用；以比例线段为载体，对比例性质、比例式及其变形等进行理论研究；用比例进行线段的比较；用比例的思想方法研究图形的性质，如平行截割定理，相似三角形，全等就是“相似比为1”；锐角三角函数；等等．在几何中，对比例的性质进行较系统的探索，并且用比例的思想方法认识和解决几何问题．

比例作为数形联系的工具，例如“坡度”概念(上升量与前进量的比)，一次函数 $y=ax+b$ 中 a 的意义(作为函数值与自变量的增量比，变化率恒定的变化特征等)，等等．

用比例的方法作统计图表；频率、概率就是一个“比例数”；等等．

高中：用比例思想方法解决更广泛、更复杂的问题．例如，在解析几何中，直线方程的问题基本上可以归结为斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，圆锥曲线中有大量与比例相关的问题；比例是研究等差数列性质的有效工具，如把 $d=a_n-a_{n-1}$ 写成 $d=\frac{a_n-a_{n-1}}{n-(n-1)}$，由它对任何自然数 n 成立，立即可由比例性质得到 $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$，于是当 $n-m=p-q$ 时，$a_n-a_m=a_p-a_q$；与斜率概念相联系，把 $d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$ 看成是由 $P_n(n,a_n)$ 和 $P_1(1,a_1)$ 决定的直线的斜率，也可以得出等差数列的许多有用的性质．

总之，当我们利用基本的几何概念(如相似)和代数概念(如线性关系)来认识比例概念、联系相关知识时，学生对比例关系的理解就会更深刻．

(未完待续)

课改需要循序渐进的持续努力；实践基础上的理论概括是可行之道；理解数学、理解学生、理解教学是三大基石.

中学数学课改的十个论题(续完)

章建跃(人民教育出版社中学数学室)

8 如何理解“不是教教材，而是用教材教”

从大量的课堂观察中发现，脱离课本进行教学的现象很普遍，这是令人担忧的.

调研表明，出现脱离课本进行教学的原因主要有：

第一，许多教师认为教材内容“简单”，不足以应付高考；

第二，误解本次课改提倡的“不是教教材，而是用教材教”，要“创造性地使用教材”的真正意图；

第三，许多教师不善于或不愿意花大力气研究教材；

第四，有的教师认为，“只有讲课本以外的东西才能显示自己的水平”.

对此，笔者的观点如下：

首先，“不是教教材，而是用教材教”是针对“照本宣科”而言的，绝对不是提倡大家“脱离教材”进行教学(当然，某些“课改专家”确实提出过“教材仅仅是课程资源的一种”“教师是课程资源的开发主体”等，但实践证明，这些观点过于理想化了).

其次，“教材太简单，不足以应付高考”的观点是偏颇的.诚然，教材的“基础性”与高考的“选拔性”的确有一定的目标差异，但学好教材一定是高考取得好成绩的前提，教师的主要精力应放在帮助学生熟练掌握教材内容上.

第三，教材的结构体系、内容顺序是反复考量的，语言是字斟句酌的，例题是反复打磨的，习题是精挑细选的.因此，在处理教材时，内容顺序的调整要十分小心，否则容易导致教学目标的偏离.例如有的教师在《数学3》第三章“概率”之前补充排列组合知识，结果使概率的教学偏离到“用排列组合求古典概型的概率”，而把“理解古典概型的特征——实验结果的有限性和每一个实验结果出现的等可能性”丢到一边，致使学生把貌似古典概型问题当成古典概型.在对课本例子的处理中，可以根据学生基础和当地教学环境替换，但所换的例子要反映教科书的意图，要能承载书上例子的教学任务.例如，“人教A版”在对函数概念的概括过程中，注意“不能用解析式表达的函数例子”的使用，其目的是要提升学生对函数概念的认识层次，体会函数表示的多样性，同时也是为了帮助学生更全面、深刻地领悟“对应关系”的本质.因此，如果把“八五以来我国城镇居民恩格尔系数变化表”换成“商品总价与商品数关系表”，就不能承载相应的教学任务；换成“北京奥运会金牌榜”(先按字母顺序对“国家”赋值)则是一个比较好的选择.

“教之道在于‘度’，学之道在于‘悟’”.在课标教材实验过程中，许多教师觉得这个“度”不好把握.笔者认为这主要是对课标教材的研读还不够深入所致，不领悟教材就不可能把握好“度”.课本，一科之本，课堂教学应“以课本为本”.

9 重结果轻过程的危害是什么

“重结果轻过程”是我国数学教学的一大弊端，尤其表现在概念教学和解题教学中.

概念教学搞“一个定义三项注意”，不讲概念产生的背景，也不经历概念的概括过程，仅从“逻辑意义”列举“概念要素”和“注意事项”，忽视“概念所反映的数学思想方法”，导致学生难以达成对概念的实质性理解，无法形成相应的“心理意义”.没有“过程”的教学，因为缺乏数学思想方法为纽带，概念间的关系无

法认识、联系,也难以建立,导致学生的数学认知结构缺乏整体性,其可利用性、可辨别性和稳定性等"功能指标"都会大打折扣.

解题历来是课堂教学的重点、核心.教师常常把注意力集中在"题型"及其技巧上,而且往往把技术直接告诉学生,然后让学生再通过模仿训练记住技巧,而对技巧的来龙去脉则语焉不详(实际上,技巧往往是"可以意会不可言传"的,就像专业运动技巧、魔术表演技巧等一样,需要经过长时间的、枯燥的千百次重复.普及教育、大众教育并不需要这种专门技巧,教学时也很难用富有启发性的语言予以传授).特别是对蕴涵于数学知识中的数学思想方法教学,因其是一种潜移默化、润物无声的"慢工",被有些教师判为"不实惠"而得不到应有的渗透、提炼和概括.结果是在稍有变化的情境中,因为没有数学思想方法的支撑,"特技"失灵,"动作"变形,灵活应用数学知识解决问题的能力成为"泡影".在"能力立意"的高考中出现"讲过练过的不一定会,没讲没练的一定不会"的结局就不足为奇了.

例8 递推数列通项公式的题型总结.

上世纪八九十年代,由于高考常常出现以递推数列为背景的压轴题,所以对递推数列的题型总结很是热闹了一阵子.后来因为控制难度、纠偏等,递推数列在高考中销声匿迹,所以教学中也就不搞了.但最近几年这个问题又热闹起来了,于是递推数列的题型及其解题技巧又热起来了.在递推数列的代数变换中,由于涉及"巧法"较多,而这些确实是学习的难点,因此教师就在技巧上大做文章,并总结出许多"题型":

(1)利用 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ 构建递推关系解决问题.

(2) $a_{n+1}=ka_n+b$ 型,当 $k=1$ 时, $\{a_n\}$ 是等差数列;当 $k\neq 1$ 时,用待定系数法,设 $a_{n+1}+m=k(a_n+m)$,求出 m,化归为等比数列.

(3) $a_{n+1}=ka_n+f(n)$ 型,当 $k=1$ 时, $a_{n+1}-a_n=f(n)$,若 $f(n)$ 可求和,则可用累加消项法;当 $k\neq 1$ 时,如果 $f(n)=an+b$,则可设 $a_{n+1}+A(n+1)+B=k(a_n+An+B)$;如果 $f(n)=q^n(q\neq 0,1)$,等式两边同时除以 q^{n+1},得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{k}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+\frac{1}{q}$,可归结为 $a_{n+1}=ka_n+b$ 型.

(4) $a_{n+1}=f(n)a_n$ 型,如果 $f(n)$ 是常数,则可化归为等比数列;如果 $f(n)$ 可求积,则可用累积约项的方法化简求通项.

(5) $a_n=k\cdot\frac{ma_{n-1}}{m+a_{n-1}}$ 型,可以考虑倒数关系,有 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{m}\right)$,可化归为 $b_{n+1}=k'b_n+c$ 型.

(6) $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$(p、q 为常数)型,可以应用"不动点"理论.

题型套题型,题型何其多;没有思想方法作为主线,成为题型的杂乱无章的堆砌.实际教学中,采取灌输的方式,将这些题型及其解法强加给学生.这种只给结果的教学是不可能奏效的,因为没有对解法的来源有任何交代,因此学生是无法理解的.

没有"过程"的教学把"思维的体操"降格为"刺激—反应"训练,是教育功利化在数学教学中的集中表现.为使数学教学成为"有思想的教学",成为提高思维能力的舞台,成为培育理性精神的阵地,必须坚持"过程与结果并重"的原则.实际上,只要设计得当,"递推数列"通项公式的教学完全可以成为充满思想性的过程,学生也可以从中获得思考方法的启迪.

例9 数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=a$,当 $n\geqslant 1$ 时,有 $a_{n+1}=pa_n+q$,其中 p、q 为常数,且 $p\neq 1$.求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

教学过程设计:

先行组织者:这是一个递推数列问题.一般地,抽象问题具体化、一般问题特殊化是数学中采用的基本策略.因此,先考查几个特殊的具体问题,以便从中找到思路.

问题1 已知 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1(n\geqslant 1)$,求通项公式.

设计意图:本题是解决整个问题的关键.取 $p=2$, $q=1$,是因为这时比较容易观察出其结构特点,并可以采取"凑"的办法,将数列化归为等比数列.

注意,教学中应该在这里舍得花时间,放手让学生自己去做,教师不必干预过多.

问题2 已知 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3(n\geqslant 1)$,求通项公式.

设计意图:这个问题主要是为了巩固一下问题1中获得的方法.

问题3 已知 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+q(n\geqslant 1$, q 为常数),求通项公式.

设计意图:这是 $p=2$ 时的一般性结论,变形为 $a_{n+1}+q=2(a_n+q)$,对引出"待定系数法"很有启发.

问题4 已知 $a_1=1$, $a_{n+1}=3a_n+1(n\geqslant 1)$,求通项公式.

设计意图:这一问题不能像前面那样容易地"凑"了.提出这一问题后,先让学生思考,待学生产生困难后,再做如下引导:

注意观察前几个问题的解决过程.变形后,得到

的等式的结构有什么共性？从中可以得到什么启发？

结论：都转化为 $a_{n+1}+t=2(a_n+t)$ 的形式.

设 $a_{n+1}+t=3(a_n+t)$，则 $t=\frac{1}{2}$，于是 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$.

问题5　一般地，对于 $a_1=a, a_{n+1}=pa_n+q$，如何求通项公式？

设计意图：在前面4个问题的铺垫下，这一问题的解决已经水到渠成. 当然，因为推广到了"同类事物"，所以要注意"完备性"，要对细节、特例进行讨论.

上述设计，我们不是把"待定系数法"强加给学生，而是通过从特殊到一般引导学生发现这类问题的结构特征，让学生通过独立思考而得到这类问题的一般解法. 虽然其"构造性"很强，但方法不是从天上掉下来的，而是"合情推理"的结果.

10　如何理解"数学应用"

关于数学应用，笔者有以下几点基本认识：

(1)数学是一门有生命力的和有广泛应用的学科，某种程度上它应该像自然科学的学科一样来探索理解.

教"数学应用"的主要目的是使学生更全面地理解数学.

"学以致用，用以促学，学用相长"应成为数学应用教学的基本指导思想.

(2)数学应用教学中，"问题领先"很重要，即以问题提供学生理解有关数学的机会；数学模型化，数据收集，数据表示，数据解释、预测、模拟等课题应该得到充分强调.

(3)特别要重视数学建模，强调数据收集、表示、诠释、预测及模拟等概念. 其用意是通过数学建模让学生在各种情境和生活背景下由数据和问题出发来体验数学的具体意义.

(4)"数学应用"有不同的侧面. "数学应用"应成为日常教学中"自然的一部分". 当然，在基础教育阶段，数学教育的最大应用是"育人".

(5)当前，"数学应用"没有得到起码的重视. "题型＋技巧"不是应用，"解题"并不是"解决问题"的缩写.

课堂是教"数学应用"的主阵地. 需要研究的问题很多，这里通过例子谈两点体会.

例10　从应用的角度看内容的变化——以三角函数为例.

以往，三角函数的重点在三角恒等变换，对三角函数本身的研究并不充分. 与此相比，"课标"对三角函数的定位有变化，它强调"函数的角度"，强调三角函数作为描述周期现象的重要数学模型的地位，认为应该"通过单摆、弹簧振子、圆上一点的运动，以及音乐、波浪、潮汐、四季变化等实例，使学生感受周期现象的广泛存在，认识周期现象的变化规律，体会三角函数是刻画周期现象的重要模型"；强调"发挥单位圆的作用"，要求用单位圆来"帮助学生直观地认识任意角、任意角的三角函数，理解三角函数的周期性、诱导公式、同角三角函数关系式，以及三角函数的图象和基本性质". 同时，"课标"降低了三角恒等变换的要求，淡化了三角恒等变换的技巧性内容. 为什么呢？这是因为"三角函数与其他学科的联系与结合非常重要，最重要的是它与振动和波动的联系，可以说，它几乎是全部高科技的基础之一". 以往强调三角恒等变换，主要是为了制作三角函数表以应付天文学、测量学的需要，而现在一个简单的函数计算器就可以搞定任何三角函数求值问题. 因此，三角函数定位和处理方式的变化，正是为了反映三角函数的现代应用，而这也是当前数学教学的薄弱环节.

另外，强调单位圆的作用也是为了更好地反映三角函数与现实的联系及其本质. "正弦函数、余弦函数是一对起源于圆周运动、密切配合的周期函数，它们是解析几何学和周期函数的分析学中最为基本和重要的函数；而正弦函数、余弦函数的基本性质乃是圆的几何性质(主要是其对称性)的直接反映." 齐民友先生也说，三角函数是匀速旋转这个最简单的圆周运动的本质表现，研究匀速旋转最重要的是研究 $P(x, y)$ 的变化，即是研究 x 和 y 作为 θ 的函数(这里 P 是单位圆上的点，θ 是单位向量 $\overrightarrow{OP}$ 从 x 轴正向开始绕原点旋转所成的角). 齐先生还说，三角函数就应该那么简单，过去把它搞得那么复杂是由于没有认识到它的本质. 抓住三角函数是为了刻画匀速圆周运动的，这样就真正抓住了要领，就能以简驭繁.

例11　改变提问方式，增加与现实的联系性——以"变量""函数"概念为例.

在"函数"的教学中，我们常常用类似于下面的问题来训练学生对"变量""函数"概念的理解：

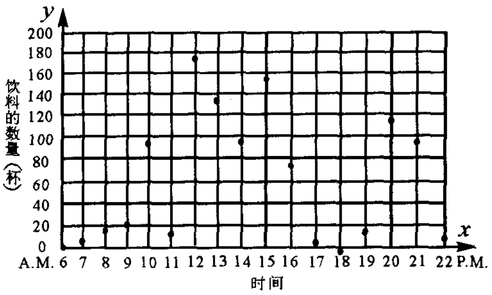
(1)已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$，求 $f(2)$，$f(f(2))$，$f(a+1)$；

(2)已知 $f(x)=215x^5+868x^3$，求 $f(7)+f(-7)$ 的值；

(3)已知函数 $f(x)=\frac{x}{mx+n}$，$f(2)=2$，且方程

$f(x)=2x$ 有一个根为$\frac{1}{2}$. 求:①m、n 的值;②$f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)$.

稍加考察可以发现,这样的题目主要是代数运算,其中量的"变化"的特征、一个量随着另一个量的变化而变化的特征都不明显. 但是如果改变提问方式,配以具体问题情境,"变量""函数"的特征就会大大加强. 例如,在下图 x 轴上,6 表示从 5:00 到 6:00,7 表示从 6:00 到 7:00,依此类推.



(1)上图显示了两个变量之间的关系. 这两个变量是什么?

(2)描述卖出饮料的数量在一天内的变化情况,并解释为什么会有这样的变化.

这样提问,两个量、一个量随另一个量的变化而变化的味道就很浓,而且解题时也要用函数的思想.

结束语

我国在世纪之交发动的中小学数学课程改革,"从国外引入"的味道较浓. 上层建筑离不开经济基础,在经济全球化背景下,我国许多经济改革措施模仿西方,我们的教育也无法摆脱西方特别是美国强势文化的影响,再加上国内某些人推波助澜,其影响就更加无法阻挡. 但是,华尔街金融风暴对我国金融、实体经济的危害已经引发有识之士的反思:到底应该如何向西方学习? 当前,许多学者在反思我国 30 年改革开放经验教训时指出,照搬西方模式的做法都失败了. 笔者认为,教育领域的改革更是如此,因为从本质上说,教育的对象实实在在地生活在这片土地上,一方水土养一方人,受这片土地所养育成的社会、人文环境的影响,受历史传统文化的影响,不可能一夜让外来的东西颠覆. 历史文化传统的力量是巨大无比的,试图一夜改变传统是非常幼稚的想法. 更加重要的是,我们的传统文化有强大的生命力,有自我净化、自我调整、自我发展的能力,那种试图用割断历史的办法,引进一种西方的思潮(例如建构主义)来彻底改变我们中华文化教育发展轨迹的想法是有害的. 因此,在教育领域盲目地否定自己的传统,简单照搬国外的做法是不足取的. 中华文明已经五千多年,我们应当对中国的教育传统的先进性、优秀性有充分的自信.

当然,我们并不是盲目地崇拜传统,而是反对简单化的全盘否定,更反对用西方的一些"先进理念"来否定我们的传统. 正确的做法是,首先要深入地了解传统,懂得传统的精髓,分析其中的精华和糟粕,并采取扬弃的办法,逐步改良. 即使真正看清了某些东西必须要改,但作为文化传统的继承、发展与创新的载体,教育改革也不能贸然全面推行,只能采取逐步渐进的方式,积跬步以至千里.

本次课改以"既试课标、又试教材"的方式推进,比较急功近利,出问题是不可避免的. 尽管如此,我们不妨把它看成是一个机会. 在大变化的背景下,一定会面临一些意想不到的问题,这些问题可以促进我们深入思考,进步就由此开始. 本文所述的这些问题,就是笔者在积极参与课改实践、深入课堂教学一线,与广大一线教师进行广泛的交流、讨论,反思自己的实践活动,经过概括、整理而得.

不过,随着时代发展,改革是必须的. 例如,信息化社会、知识经济时代要求学校教育更加关注学生健康、和谐与可持续发展,要使学生学会学习,要强调创新精神和实践能力的培养,这就要求我们变革教学方式,并由此带动学生学习方式的变革. 在这个过程中,就需要改变我们自己的习惯做法. 改变习惯是困难的,更深入、透彻地"理解数学,理解学生,理解教学",就可以使我们找到化解困难的康庄大道.

参考文献

1 人民教育出版社中学数学室编著. 全日制普通高级中学教科书(必修)数学第一册(下)[M]. 北京:人民教育出版社,2006

2 项武义. 基础数学讲义丛书·基础几何学[M]. 北京:人民教育出版社,2004

3 李邦河. 数的概念的发展[J]. 数学通报,2009,1~3

4 林崇德. 我的心理学观[M]. 北京:商务印书馆,2008

5 章建跃. 概括——概念教学的核心[J]. 中小学数学(高中),2008,11

6 章建跃. 探究式教学的天时、地利与人和[J]. 中小学数学(高中),2008,7~8

7 齐民友. 三角函数,向量,复数[J]. 数学通报,2007,10~11