25.4 分部积分法计算不定积分

一、教学内容解析

1.教材分析

《分部积分法》选自数学第七册第 25 章《不定积分》第四节。分部积分法是一种重要的求不定积分的方法，是本章的重点也是难点，在实际问题中，函数较为复杂，多数不定积分都要用到分部积分法。分部积分法的上位知识是基本不定积分公式的应用及换元积分法，利用换元将被积函数的复合函数部分转化为基本积分公式中的被积表达式形式，达到化难为易的目的。分部积分法主要研究两个函数乘积的形式的不定积分问题，将被积函数进行转化为基本积分公式中的被积表达式形式，从而易于计算。本节的学习也为下位知识定积分的求法奠定了坚实基础。本节内容教学两课时，现为第一课时教学。

2.教学重点与难点

教学重点：掌握分部积分公式

教学难点：分部积分公式的应用

二、学生学情分析

从知识储备上看，学生已经学习了不定积分的概念及基本积分公式，换元积分法，会求简单函数的不定积分，学生有良好的认知基础，知道常用凑微分的公式与方法，这为探究分部积分公式奠定了基础。

从学习能力上看，教学对象是五年制高职数控专业四年级学生，思维活跃，具有一定的想象能力和研究问题的能力。经过半年多的训练，学生逐步形成小组合作探究，代表上台讲解概括总结的学习模式。

从学习心理上看，前面学习了直接运用公式简单函数的不定积分，相对难度不大，对学生的学习不构成挑战性，因此学生也渴望有一些困难的问题，来激起认知冲突，从而提高学习的积极性。

三、教学目标设置

1.掌握分部积分公式，体会分部积分的要点，并能求相关函数的不定积分。

2.经历类比基本积分公式、换元积分法的数学活动经验，探究发现分部积分公式，体会转化的数学思想，发展直观想象、数学运算、逻辑推理等素养。

3.通过具体案例，体会分部积分法的**关键是选取适当的 u 和 v**,养成严谨、细心、耐心的学习习惯。渗透**“做一件事，就像做积分一样，持之以恒，点滴积累，方能成功！”**

的价值观。

四、教学策略分析

1. 教法分析：采用“探究发现式”教学，教学中遵循教师主导、学生主体、探究主线，教师更多的是启发引导学生思维。

2. 学法指导：（1）自主学习　（2）合作学习　（3）探究学习

对于分部积分公式的教学，采用“探究发现式”教学，依据知识的发生发展过程和学生的思维规律，引导学生观察——感知——抽象－－概括的实践活动。规律让学生自主发现，方法让学生自主寻找，思路让学生自主探究，问题让学生自主解决。

一、温故知新

前面我们学习了基本积分公式，如$\int e^x dx = e^x + \mathrm{C}$的应用。积分公式中的 $\boldsymbol{x}$ 也可以是 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数。如$\int e^{2x} d2x = e^{2x} + \mathrm{C}$，　$\int e^{x^2} dx^2 = e^{x^2} + \mathrm{C}$

即

$$\int e^{\blacksquare} d\blacksquare = e^{\blacksquare} + \mathrm{C}$$

其中$\blacksquare$可以是自变量 $\boldsymbol{x}$，也可以是 $\boldsymbol{x}$ 的函数。

还学习了换元积分法，如（1）$\int e^{2x} dx$，（2）$\int x e^{x^2} dx$，你会做吗？

课程思政：“积分”原理：做一件事，就像做积分一样，持之以恒，点滴积累，方能成功！

正所谓：养小德才能成大德，积小才方可成大才，聚小业方能谋大业！千里之行始于足下！水滴石穿非一日之功，冰冻三尺非一日之寒！不积跬步，无以至千里，不积小流，无以成江海！等等，就是这个道理！

设计意图：通过温故知新，一是复习与巩固基本积分公式和换元积分法，为分部积分法的学习打好基础。二是渗透课程思政，融价值引领于知识学习与能力培养中。

二、专业情境

设生产x单位某产品的总成本C是x的函数$C(x)$，已知固定成本（即$C(0)$）为230 万元，边际成本$C'(x) = \frac{1}{8} x e^{\frac{1}{8}x} + e^{\frac{1}{8}x}$（万元/单位），求总成本$C(x)$。

分析：根据边际成本的定义和不定积分的性质，有

$$C(x) = \int C'(x) dx = \int \left(\frac{1}{8} x e^{\frac{1}{8}x} + e^{\frac{1}{8}x}\right) dx = \int \frac{1}{8} x e^{\frac{1}{8}x} dx + \int e^{\frac{1}{8}x} dx$$

问题转化为求不定积分$\int \frac{1}{8} x e^{\frac{1}{8}x} dx$的值，怎么求呢？

设计意图：通过专业案例，让学生体会数学的应用性和职业性，调动学习积极性。

三、建构数学

类比：我们知道，从求导数的基本公式可以得到基本积分公式，从两个函数和与差的求导公式我们可以得到和与差的积分公式，自然地，从两个函数的乘积求导公式，我们可以得到什么积分公式？

设函数$\mathrm{u}=\mathrm{u}(\mathrm{x})$，$\mathrm{v}=\mathrm{v}(\mathrm{x})$具有连续导数，$\boldsymbol{uv}$ 的导数公式是什么？

$$(\mathrm{uv})' = u'v + uv'$$

即
$$d(uv) = \mathrm{vdu} + \mathrm{udv}$$

即
$$udv = duv - vdu$$

两边分别求不定积分

$$\int udv = \mathrm{uv} - \int vdu$$

分部积分公式：设函数$\mathrm{u}=\mathrm{u}(\mathrm{x})$，$\mathrm{v}=\mathrm{v}(\mathrm{x})$具有连续导数，则$\int udv = \mathrm{uv} - \int vdu$。

注：这样就将求$\int udv$的问题转化为求$\int vdu$的问题，当积分$\int udv$不容易计算时，而$\int vdu$比较容易计算时，这个公式就可以发挥作用了。

设计意图：充分利用学生已有“求导数基本公式，和与差的积分公式”研究方法的经验，通过类比，提出问题，引发学生思考，从而得到本节课的重点内容。

例 1　求下列不定积分:$\int xcosxdx$

解：设$\mathrm{u}=\mathrm{x}$，$\mathrm{dv}=\mathrm{cosxdx}=\mathrm{dsinx}$，

则有$\int xcosxdx = \int xdsinx = xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + C$

在求这个不定积分时，如果设$\mathrm{u}=\mathrm{cosx}$，$\mathrm{dv}=\mathrm{xdx}=\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)$, 则有

$$\int xcosxdx = \int cosx\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2cosx + \int \frac{1}{2}x^2sinxdx$$

注：1. 上式的右端比原不定积分更难计算，在利用分部积分公式求积分时, 适当选择 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是关键。

2.选择的原则一是由$\boldsymbol{\varphi(x)dx = dv}$求 $\boldsymbol{v}$ 比较容易，二是$\int \mathrm{vdu}$比$\int \mathrm{udv}$更容易计算。

3.当被积函数是多项式与正（余）弦函数乘积，多项式设为 $\boldsymbol{u}$。

设计意图：通过选取不同的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$**,**让学生体会、感悟和归纳 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的方法与原则，问题让学生解决，方法让学生归纳，结论让学生发现。体现学生是学习的主人。发展学生的数学学科核心素养。

例 2　求下列不定积分:$\int x\mathrm{e}^{\mathrm{x}}d\mathrm{x}$

解：设$\mathrm{u}=\mathrm{x}$，$\mathrm{dv}=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx}=\mathrm{de}^{\mathrm{x}}$，

则有$\int x\mathrm{e}^{\mathrm{x}}d\mathrm{x}=\int xd\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=x\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-\int \mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx=x\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+\mathrm{C}$

注：当被积函数是多项式与指数函数乘积，多项式设为 $\boldsymbol{u}$。

练习：求下列不定积分（1）$\int xsinxdx$　　　　（2）$\int x\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}dx$

四、问题解决

由$C(x)=\int C'(x)dx=\int\left(\frac{1}{8}x\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}+\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}\right)dx=\int\frac{1}{8}x\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}dx+\int\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}dx$

$=\int x\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}d(\frac{1}{8}x)+8\int\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}d(\frac{1}{8}x)=\int xd(\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}})+8\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}=x\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}-\int\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}dx+8\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}$

$=x\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}-8\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}+8\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}+\mathrm{C}=x\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}+\mathrm{C}$

因为$C(0)=230$，所以$C=230$，所以$C(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{8}\mathrm{x}}+230$

五、回顾反思

1.分部积分公式：设函数$\mathrm{u}=\mathrm{u(x)}$，$\mathrm{v}=\mathrm{v(x)}$具有连续导数，则$\int udv=\mathrm{uv}-\int vdu$

2. 关键与原则：合理选择 $\boldsymbol{u}$**，**$\boldsymbol{v}$，选择的原则一是由$\boldsymbol{\varphi(x)dx=dv}$求 $\boldsymbol{v}$ 比较容易，二是$\int\mathrm{vdu}$比$\int\mathrm{udv}$更容易计算。

3. 思想与方法：转化思想，转化为等价的易求出结果的积分形式。

4. 课程思政：积分原理：做一件事，就像做积分一样，持之以恒，点滴积累，方能成功！

六、课后拓展

1. 求下列不定积分

（1）$\int(x+1)\mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx$（2）$\int x\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{2}}d\mathrm{x}$（3）$\int x^{2}\mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx$　（4）$\int x^{2}sinxdx$。

2. 思考题：求$\int\mathrm{x}^{3}e^{x^{2}}\mathrm{dx}$

提　示　： $\int\mathrm{x}^{3}e^{x^{2}}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int\mathrm{x}^{2}e^{x^{2}}\mathrm{dx}^{2}=\frac{1}{2}\int\mathrm{x}^{2}\mathrm{d}e^{x^{2}}=\frac{1}{2}\mathrm{x}^{2}e^{x^{2}}-\frac{1}{2}\int e^{x^{2}}\mathrm{dx}^{2}=\frac{1}{2}\mathrm{x}^{2}e^{x^{2}}-\frac{1}{2}e^{x^{2}}+C$