

中学数学月刊

ZHONGXUE SHUXUE YUEKAN



2020.8

ISSN 1004-1176

苏州大学
江苏省数学学会

The Monthly Journal of High School Mathematics

中学数学月刊

苏步青题

主 编 徐稼红
副主编 阮 超
(下按姓氏笔画为序)
编 委
王合才 王萍萍
丰甘富 石志群
祁建波 汤建明
李善良 严亚强
严继高 余红兵
沈新旺 阮芳兰
陈 曦 陈江华
周 超 夏 炎
钱定边 徐稼红
曹永罗 袁 灼
曹林伟 潘洪亮

目 次

名师讲坛

于平常之中发现不寻常——“任意角”的教学设计与反思…… 张志勇(1)

数学教育

数学实践教学支持体系的要素设计…… 孙明仁(3)

德育教材 融通自来…… 阮 建(9)

教材解读

巧设情境促发现 激活思维助练习…… 过家福 殷 玲(13)

反思学生解题错误 避免课堂教学失误…… 周荣伟(17)

渗透合情推理的教学设计研究…… 张 昱 罗清梅(19)

初中数学专题课教学探微…… 王向东 李殿霞(22)

复习之友

借助问题驱动 促进素养提升

——以高三专题复习“动态空间几何中的最值问题”为例……

…… 赖志华 徐丽峰(25)

教学设计

多种教学观视角下的排列概念教学设计……

…… 刘 乙 赵从斌 高 峰(28)

追觅问题情景 还原概念生成

——记一堂优质课的设计与思考…… 朱 满 刘慧平(31)

深度学习数学概念 发展数学核心素养

——以“任意角”教学为例…… 陈 磊(38)

课堂与反思

以“实验上思维”有效培育学生“四能”

——从一堂课反思新课改学生“四能”培养…… 阮 浩(35)

在“变”与“不变”中教学生学会思考

——以“平面图形为背景的应用题研究”一课为例…… 王文杰(39)

创设双曲线作图情境 再认识反比例函数

——几何画板软件辅助动态几何线上教学实践…… 赵欣夫(41)

基于学生“学内”可建构的出发点

——以听课“二次函数图像和性质”课题为课例……

…… 戴秀琴 施俊士(43)

比较研究

中美高中数学教材的学科内容比较研究…… 朱树金(47)

数学文化

π 的计算…… 章广慧(51)

解题方法

从基本量出发,一线中高考试题与竞赛试题…… 束文清 徐立军(54)

齐次化联立方程,简化区生山猴解题运算…… 狄立军(57)

数学随笔

终身学习的工具——观点的数学专业语言…… 葛 秦(59)

试题选登

2020年高考江苏省数学模拟试题及参考答案…… (60)

巧设情境促发现 激活思维助提问

过家福 (江苏省南菁高级中学 214415)

殷玲 (江苏太仓高级中学 214125)

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(下称:课标2017)指出:要切实提高发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力,即“四能”,而发现和提出问题的能力是学生的短板,亟待加强.数学教学应服务于国家的创新战略,而创新思维要以问题情境为载体,波利亚说“教师的作用在于:系统地给学生发现事物的机会,并给予恰当的协助,让学生在情境中亲自发现尽可能多的东西.”所以创设新颖、迫切的情境及问题可以激发学生的兴趣和求知欲,让学生乐于发现问题、提出问题,并在对问题的质疑和探究解决的过程中深化对数学的理解,激活思维.本文着重于探讨通过巧设多冲问题情境,培养学生发现问题和提出问题能力的过程中教师应大有可为.

1 创设教学文化情境,引导学生思考,促学生发现、提出问题

《课标2017》明确提出要把数学文化融入课程内容,并在知识结构中清晰反映出来.数学文化是精数学的思想、精神、语言、方法、观点以及它们的形成和发展,也包括与数学相关的哲学、人文活动,如古代一些名人、名句和经典故事.在教学活动中,通过创设某种数学文化情境引出一个命题,或以数学史融入新知教学中,可以有效地促使学生发现、提出问题.

课例1 高一必修1“对数(1)”的创设与问题.

在一次江苏省高中数学优质课展示活动中,笔者聆听到一位教师执教的《高中数学必修1“对数(1)”》课,其中创设了如下的数学文化情境:“大家听说过古代的思想家庄子吗?”(请学生简单说明)庄子是战国时期著名的思想家、哲学家、文学家,是道家学派的代表人物,庄子学派的创始人.他的学说涵盖天、地、人,世称为“老庄”,“老庄哲学”的思想包含着朴素辩证法的因素.教师投影——庄子曰:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”师:根据这句话,请大家提出一些数学问题,譬如取1次,还剩余多长?

在教师的启发下,有几位学生陆续提出了如下问题:

问题1 取2次、3次,分别剩余多少尺?

问题2 取 x 次,剩余多长?

问题3 取多少次还剩余0.2尺?取多少次还剩余0.01尺?(若 $(\frac{1}{2})^x = 0.2$,求 x ;若 $(\frac{1}{2})^x = 0.01$,

求 x .)

问题4 取多少次后剩余不足0.001尺?(若

$(\frac{1}{2})^x < 0.001$,求 x .)

教师充分肯定了学生的发现意识和提出的问题,兴致勃勃地说:“我也来烫个热闹!”

问题5 把“日取其半”改为“日取其三分之一”,又能提出哪些问题?

许多学生说:都可以类似地问一遍(略).

师:请同学们观察,“已知 $(\frac{1}{2})^x = 0.2$, $(\frac{1}{2})^x = 0.01$, $(\frac{1}{2})^x < 0.001$,求 x ”是一种什么运算?

生(为数不少):已知底数和幂值,求指数.

教师肯定后指出“这是一种新的运算,今天就来研究这一新问题”,从而引出对数的概念.在此基础上,教师穿插介绍数学史,师生共同阅读课本第72页《阅读》,主要内容是纳皮尔发明了数表,教师揭示了指数与对数的密切联系,恩格斯把笛卡尔的坐标系、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼兹的微积分共同称为17世纪的三大数学发明.

本课开始进行的一段关于庄子的内容,学生很感兴趣,又从此引出“一尺之棰,日取其半,万世不竭”引出数学问题.教师先开了一个头,学生就类似、变式、逆向地提出了一些问题,这样的提问把指数、对数联系起来,学生有话(问题)可说,这段简短的名人介绍及之后的《阅读》很有必要.对数概念比较抽象,通过创设数学文化情境,不仅给学生营造了一个良好的学习氛围,而且很好地揭示了抽象概念的背景和发展过程,有助于学生发现结论的形成过程,真正理解数学概念,还能引发学生数学地思考,从而发现、提出问题.

评析 (1)在学生发现、提出问题之前,对学生能力进行预估,在学生发现、提出问题的过程中,要根据学生的实际能力给予指导.如上述过程,教师先转引玉,之后又引导学生换一个角度(从三分之一到三分之一)思考,拓宽了思维;(2)要把数学文化有效融入数学教学中,教师首先应武装自己,多掌握有关数学史、数学典故,方能行有依归,指导学生;(3)数学文化内涵丰富,需要教师结合教材特点和学生的经验、体验,挖掘其资源,进行综合与再加工,并能从中得到启迪,切实发挥以

数学文化背景、引路、促进的功能.

2 创设生活情境,让学生体验,促学生发现,提出问题

生活是数学赖以生存和发展的源泉,数学知识源于生活,数学问题也存在于生活之中的方方面面,生活中形成的常识、经验是学习数学的基础,提出一个问题更需要直觉、经验性的感性认识作为支持.心理学研究表明,学习的内容与学生的生活背景越接近,与学生的认知水平越适应,就越能诱发学生产生提出问题的心理倾向,越能促进学生提出问题的意识,进而发现问题、提出问题.因此,在教学中,需要为学生提供贴近生活实际的、生动丰富的经验性材料,让学生在对生活情境的观察、分析和探究中体验知识的发生发展过程,积累基本的数学活动经验,培养发现问题和提出问题的能力.

课例2:高二必修2“直线与平面垂直”的导课与问题.

在一次江苏省高中数学教师优质课评比活动中,笔者有幸全程参与了“直线与平面垂直的判定”一课的教学设计和授课的过程.每所该校一位参赛选手充分挖掘教材,紧扣生活实际进行了如下的情景设计,收获了令人满意的效果.

师:同学们,请观察下列三幅图(图1),第一幅是五星红旗矗立在大兴门广场,它是伟大祖国的象征;第二幅是某城市的摩天大楼,见证着这座城市发展的飞速进步;第三幅是比萨斜塔(高55 m,倾斜3.9°),是意大利托斯卡纳省比萨城的一个标志性建筑.



图1

师:把国旗旗杆、摩天大楼、斜塔抽象成直线,地面不构成一个平面,请大家从线面位置关系的角度进行思考与设计,能提出哪些需要研究的数学问题?(注意表述所学)

有几位学生陆续提出以下几个问题:

问题1:国旗旗杆、摩天大楼、斜塔所在的直线与地平面位置关系是什么?

问题2:“直线与平面垂直”和“直线与平面相交”,两种说法有何异同?

问题3:对直线与平面垂直,一般会研究那些内容?

问题4:直线、国旗旗杆和地面、摩天大楼与地面是互相垂直的,判断依据是什么?

问题1、问题2比较简单,直线与平面垂直,直线与平面相交是一般与特殊的关系.学生回答后,教师追问:

你还能举出生活中可以抽象成直线与平面垂直的例子吗?几位学生回答,有书说“笔直的电线杆和地面”,有书说“东方明珠塔和地面”,有书说“教室中旗杆与地面”……

对上述问题3,学生类比直线与平面平行研究思路,定义、判定、性质,由此确定要研究直线与平面垂直的定义、判定与性质.

师:在实际生活中存在大量的可抽象成直线与平面垂直的实例,本节课就来研究直线与平面垂直的定义、判定.

教师追问:

问题5:直线与平面垂直的判定如何研究?直线与平面垂直性质如何研究?

类比直线与平面的学习,得出:直线与平面垂直的判定是通过操作确认,直线与平面垂直性质是通过观察、猜想并证明.

又下问题4,通过定义判定不方便,需要寻求简单可行的操作方法,有必要学习直线与平面垂直的判定定理.

教师创设了“三幅图”的生活情境,源于生活、贴近时代,既有教育意义,在情境中体验,能激发学生的学习热情 and 兴趣.本节课巧妙引导学生提出问题并穿插提问结合起来.教师把相关实际问题抽象成直线与平面后,提出“请从线面位置关系的角度进行思考与设计,能提出哪些需要研究的数学问题?”(运用类比)这样的问话落在学生的最近发展区内,他们根据已有的学习经验提出了24个问题.教师回应前两个问题后进行追问,增加了学生对线面垂直的感性认识.解决问题2后教师再次追问(问题3),从问题2到问题5,即直线与平面垂直研究什么、为什么(依据)要研究、如何研究,就形成了一个系列问题,这也是一般科学研究的一个问题,是在教学生学会学习、学会研究、学会思考.

评析:(1)创设生活情境,能使抽象知识具体化,使深奥道理通俗化,从而使学生感受到亲切感,乐于参与,比较容易发现并提出问题.因此,教师需要多关注、联系生活实际,从学生熟悉的生活和学习环境中选取与教学相关、生动形象的实例.譬如三角函数的周期性教学,可联系生活中的摩天轮、月亮绕地球公转等情境引发学生思考,促其探索发现并提出新的问题.创设情境后,有时需要教师提出一个初始问题,如本课“能提出哪些需要研究的数学问题?”(运用类比),既能引导学生探索的兴趣,也让学生有问题可提.(2)从学生的认知角度来看,数学知识的认识很大程度上取决于学生对实践经验的获取.因此在课堂上可采取形式多样的活动,如学生动手操作、数学小实验、小组合作讨论与评价等,在众多的实践活动中促使学生发现、提出问题.

3 创设困惑情境, 给学生质疑, 促学生发现、提出问题

学之道在于悟, 学生认知的发展往往要经过自己的反思和感悟才更有效, 也更真实, 所以引导学生质疑和反思是促进学生有效学习的重要手段. 思起源于疑, 然而现在中学生普遍缺乏质疑意识, 课堂上大都是教师讲、问, 学生听、答, 教师板书、学生记录, 学生被动学习的问题比较突出, 成人忙于赶作业、刷题, 鲜有自己的想法, 很难有质疑和反思的机会, 怎么谈得上去发现问题、提出问题呢? 对此, 我们有必要予以矫正.

课例 3 试卷讲评课“析数问题”的情境与问题

在一节高三期末考试试卷讲评课上, 教师投影出一位学生的解答过程, 请大家一起寻找其分原因. 针对学生是理科普通班, 能力相对薄弱的特点, 教师并不是采用直接告知正确结论的讲评式, 而是先展示带有普遍性的错误解答过程, 让学生评判、质疑.

投影: 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{a}{2}x^2 - ax (a > 0)$,

(1) 当 $a = 1$ 时, 求证: 对于任意 $x > 0$, 都有 $f(x) > 0$ 成立; (2) 略.

解: 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$, 求导得 $f'(x) = e^x - x - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		极大值	

当 $x = 0$ 时有极大值, 也是最小值, 所以 $f(x) = 0$, 得证.

投影: 出来, 学生们议论纷纷.

生 1: 我就这么做的, 感觉没错啊, 过程很流畅, 可是只得 1 分. (不好意思地笑了)

生 2: 肯定错了! 首先题意是要求 $x > 0$, 所以区间 $(-\infty, 0)$ 不需要考虑, 其次 $(0, +\infty)$ 上单调性并没有证明.

生 3: $f'(x) = e^x - x - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$. 这个根应该是观察得来的. 除了这个根, 确定没有别的根了吗? 我认为这种超越方程形式应该二次求导. 正确答案是: 令 $g(x) = f'(x)$, 对 $g(x)$ 求导, $g'(x) = e^x - 1$. 当 $x > 0$ 时, 有 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $g(x) > g(0) = 0$. 于是 $f'(x) > 0$, 有 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x) > f(0) = 0$ (掌声). (鼓掌的学生恍然大悟)

师: 学生 2 说得精彩! 原解法有两个问题, 其一, 观察得未必正确; 其二, 作为解答题的推理步骤有瑕疵. (之后引导学生反思: 这题目的结论是否能拓展、推广?)

生 4: $g(x) = f'(x) = e^x - x - 1 > 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 是

恒成立的, 令 $g'(x) = e^x - 1 = 0$, 则 $x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

当 $x = 0$ 时有极小值, 也是最小值, 所以 $g(x) \geq g(0) = 0$, 以下证明同上.

教师肯定了学生 4 的算法, 把投影中的表格, 由 $x > 0$ 推广为对一切实数都成立. 之后教师说明: $e^x \geq x + 1$ 这类恒等式在以后的导数综合题中会经常出现, 类似的还有 $e^x \geq x^2$, $\ln x \geq x - 1$ 等都会成为我们“熟悉的朋友”!

试卷讲评课, 学生习惯由教师说出错在哪里, 告知正确的解法是什么, 鲜有学生集思广益对自己进行提问. 这样不仅缺乏针对性且无效, 更是缺少一次给学生质疑纠错的机会. 正是以试卷讲评, 对学生而言是熟悉且印象深刻的情境, 可减少一些思考问题的时间, 增多一些观察、质疑解惑、寻找错因的时间. 该班学生有些疑问、有些不同“声音”, 是源于该班教师与时俱进、专业素养高, 平时教学中经常给学生提问的机会, 所以课堂上学生还给教师一些惊喜就不足为奇了.

评析: (1) 教师自身需要有较强的质疑意识, 要善于对问题进行反思和质疑, 以教师自身良好的行为带动学生, 体现榜样力量. (2) 鼓励学生大胆发言, 倡导不同声音、不同观点相互碰撞, 便于产生问题, 这需要教师有组队的数学专业素养和课堂驾驭能力. (3) 在新授课、复习课和试卷讲评课, 教师都要积极创设质疑问题的机会, 辨析概念、质疑过程, 多让学生板演, 以暴露问题, 寻找一些错例让学生找茬, 以培养学生观察、发现和纠错的能力. (4) 不能止步于问题解决, 要进行适当拓展、推广, 以扩大成果; 教师还需适当留白, 引导学生反思中寻求质疑“点”, 便于催生问题.

4 创设开放情境, 引导学生联想, 促学生发现、提出问题

开放的情境是不限定问题发展的方向, 结论可以有多种可能性. 开放的情境来源于学生现实, 与学生的认知水平相适应, 对学生来说是真实可感知的; 开放的情境应具有一定的挑战性和探究性, 可让学生全方位、多角度思考, 进行充分想象、发散联想. 在思考、想象和联想中有所发现. 在数学教学中, 创设丰富的开放性情境有助于学生从中发现并提出问题.

课例 4 微专题复习课“基本不等式”的情境与问题

在一次高二“基本不等式”微专题复习课上, 教师设计了如下情境: 若正实数 x, y 满足 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 对该条件从不同角度联系、联想, 可以得到哪些不同的结论? 说出你的想法.

生1:可以添多项,得 $x^2-y^2=3+xy$,再利用基本不等式, $3+xy \geq 2xy$,可得 $xy \leq 3$,当且仅当 $x=y$ 时取等号,故 x, y 的积的最大值为3.

生2:可以凑一个完全平方.譬如,在等式两边同时加上 $2xy$,得 $(x+y)^2=3+3xy$ ①.求 $x-y$ 的最大值.由基本不等式,得 $(x+y)^2=9+3xy \leq 9+3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,所以 $\frac{3}{4}(x+y)^2 \leq 9$,得 $x+y \leq 3$,当且仅当 $x=y$ 时, $x+y$ 取得最大值3.

生3:我提个问题——条件不变,能否分别求 $2x+y, 3x-y$ 的最值?

生4:如果能将 x, y 表示为一个三角函数就可以了.

生5:我来试试.先将左边配方, $\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2=3$,再进行三角代换,令 $\begin{cases} x-\frac{1}{2}y=3\cos\alpha, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=3\sin\alpha, \end{cases} \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (学生

边说边写,教师板书),得 $\begin{cases} x=3\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, \\ y=2\sqrt{3}\sin\alpha. \end{cases}$ 这样

x, y 都可以用 α 来表示,故 $2x+y=6\cos\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha=4\sqrt{3}\sin\alpha+6\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin(\alpha+\theta)$,其中 θ 满足 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, α 可取到一个锐角,使得 $\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$,所以 $2x+y$ 最大值为 $2\sqrt{2}$.

类似地,可求 $3x-y$ 的最值(略).

生6:观察形式 $x^2-xy+y^2=3$,如果将其中的 x, y 分别换成 a, b ,则有 $a^2-ab+b^2=3$,联想到余弦定理, a, b, c 作为三角形的三边,其中 $c=3$,所对的角是 $C=60^\circ$.接下来就可以在三角形中继续提出问题了.

生5:比如满足上述条件的三角形面积能否取得最大值?三角形周长的取值范围如何?

生7:我来试试吧!因为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$,所以由

生1的解答,我们就可以求出面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

生8:类似地,由生2的解答就可求得周长 $a+b+c$ 的最大值为12,又因为三角形两边之和大于第三边,所以 $a+b>3$,所以周长的取值范围是 $(6, 12)$.

师:了不起!真心为你们点赞.看你们提问感兴趣这么高,我也来提一个问题:若正实数 x, y 满足 $x^2-xy+y^2=3$,且 $|x^2-y^2| \leq 9$,求 xy 的取值,请大家课

后试试.

教师精心设计了具有“开放性的情境”正实数 x, y 满足 $x^2-xy+y^2=9$,对于同数平方和与两数积形式的问题,学生积累了一些经验,能联想两数积及 $ax+by$ 的形式,还能联想到三角形中的面积、周长等方面,提出一些问题,并运用基本不等式及其变形去分析、解决问题.这样,由开放性的情境带来开放性的结论(多元结论),也带来了方法的开放性(不同角度),有利于培养学生的发散性思维.

评析 首先,教师需要精心设置一个开放的情境,贴近学生的学习和生活的实际,情境的视角可以顾及不同的方向,学生经过思考有话可说.其次,教师需要营造一个较为宽松、自由的环境,让学生相互交流,以产生问题,碰撞火花,思考问题还须留给学生必要的时间、空间.再次,要以情境为载体,鼓励学生大胆联想,通过相近联想、相对联想和类比联想,促进知识的迁移与拓展,转换视角,便下发现新问题,新结论,从而培养学生发现问题、解决问题的能力.如本课例中学生3提了一个很有价值的问题,是基于对形式 $x+y, xy$ 的相近联想,得到 $2x+y, 3x-y$ 以及 $ax+by$,又因解决问题的需要,联想到三角换元,进而联想到解三角形的有关问题(面积、周长等).

5 结束语

创设问题情境还有其他一些途径.譬如,可创设对比情境,让学生通过知识、方法间的类比、联想,提出新问题;还可创设直观情境,借助多媒体技术,将学生感觉模糊、抽象的学习材料直观、形象地展示出来,让学生更好地体验问题的形成,探索问题的解决方法等.有利于他们发现和提出新问题.其次,如果所在班级课堂气氛不够活跃,可以请1~2个性格开朗、有想法的学生带头“抛砖”,可能引出更多的“玉”.只要学生能提出一点问题,教师就要予以肯定和鼓励,让学生逐步体验到成功的喜悦才提问的魅力.

根据内容的特点和学生的实际,创设適切的问题情境促进学生发现问题,通过激活思维帮助学生提出问题,进行分析与解决,从而达到培养学生的创新思维与实践能力.因为创新源于问题、源于发现.同时,让学生发现和提出问题也是给学生表现的机会,体现学生的主体性.这样的课堂对教师是一个挑战,需要有较强的专业实力,既要能应对学生发散的问题,还可能要变换视角重新提出问题,唯有学习研究、提升教学智慧,方能顺利实施.

参考文献

- [1] 王华民,侯威.从一堂概念课的不同导入谈数学史融入数学[J].数学通报,2014(6):47-52.