

20 题考查了构造法,而第 12 题中代数关系式的最值求解可以利用配凑法、消参法、待定系数法、判别式法、三角换元法及求导法等数学方法来处理与转化等.

例 2 (2020 年高考数学江苏卷第 12 题) 已知  $5x^2y^2 + y^4 = 1 (x, y \in \mathbf{R})$ , 则  $x^2 + y^2$  的最小值是\_\_\_\_\_.

解法 1: 根据条件  $5x^2y^2 + y^4 = 1$ , 利用基本不等式, 可得  $4 = (5x^2 + y^2) \cdot 4y^2 \leq \left[ \frac{(5x^2 + y^2) + 4y^2}{2} \right]^2 = \frac{25}{4} (x^2 + y^2)^2$ , 当且仅当  $5x^2 + y^2 = 4y^2 = 2$ , 结合  $5x^2y^2 + y^4 = 1$ , 即  $x^2 = \frac{3}{10}, y^2 = \frac{1}{2}$  时等号成立, 所以有  $x^2 + y^2 \geq \frac{4}{5}$ , 即  $x^2 + y^2$  的最小值是  $\frac{4}{5}$ , 故填答案:  $\frac{4}{5}$ .

解法 2: 根据条件  $5x^2y^2 + y^4 = 1$ , 利用基本不等式, 可得  $x^2 + y^2 = \left( x^2 + \frac{1}{5}y^2 \right) + \frac{4}{5}y^2 \geq 2\sqrt{\left( x^2 + \frac{1}{5}y^2 \right) \cdot \frac{4}{5}y^2} = 2\sqrt{\frac{4}{25}(5x^2 + y^2) \cdot y^2} = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ , 当且仅当  $x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{4}{5}y^2 = \frac{2}{5}$ , 结合  $5x^2y^2 + y^4 = 1$ , 即  $x^2 = \frac{3}{10}, y^2 = \frac{1}{2}$  时等号成立, 所以  $x^2 + y^2$  的最小值是  $\frac{4}{5}$ , 故填答案:  $\frac{4}{5}$ .

解法 3: 当  $y = 0$  时, 原式  $5x^2y^2 + y^4 = 1$  不成立, 则  $y \neq 0$ , 利用基本不等式, 可得  $5x^2 + 5y^2 = \frac{1-y^4}{y^2} + 5y^2 = \frac{1}{y^2} + 4y^2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{y^2} \cdot 4y^2} = 4$ , 当且仅当  $\frac{1}{y^2} = 4y^2$ , 结合  $5x^2y^2 + y^4 = 1$ , 即  $y^2 = \frac{1}{2}, x^2 = \frac{3}{10}$  时等号成立, 所以有  $x^2 + y^2 \geq \frac{4}{5}$ , 即  $x^2 + y^2$  的最小值是  $\frac{4}{5}$ , 故填答案:  $\frac{4}{5}$ .

点评: 破解此类问题都是有效联系条件中的代数关系式与结论中的代数关系式两者之间的关系, 结合认真审视试题, 合理巧妙变换, 借助比较常见的通性通法来处理与解决, 为不同层次的学生破解问题提供条件.

### 三、凸显能力, 突出创新

试卷秉承重基础、重本质的一贯命题思路, 在此有效凸显数学能力与数学核心素养, 对学生的能力有较高的要求. 特别是一些试题涉及多个知识点, 具有一定的综合性, 试题表述简练精准, 知识点清晰不堆砌, 解答题设问清楚有梯度, 对不同基础、不同能力水平的学生都提供了适当的思考空间与能力要求, 让不同能力水平的考生都有充分发挥的空间. 例如第 20 题的数列新定义问题, 第(1)问作为基础性问题, 给 60% 的考生提供思考与破解的能力要求; 第(2)问作为中等提高性问题, 给 20% 的考生提供更进一步的分析能力、推理能力的拓展空间; 第(3)问作为竞赛性问题, 给 5% 的考生提供创造性解决问题的空间, 合理梯度设置, 确保试卷的区分度, 有利于选拔不同层次的优秀人才.

同时, 试卷抓住数学教学必须源于教材, 源于生活, 比较贴近中学生的生活实际, 突出创新意识, 从课程改革的理念出发, 充分体验数学在解决实际问题中的应用, 以及数学与日常生活的密切联系, 检测考生学以致用能力, 以及应用意识, 促进学生逐步形成和发展数学的创新意识与应用意识. 如第 4 题中的正方体骰子(考查古典概型的概率公式), 第 9 题中的六角螺帽毛坯(考查空间几何体的体积), 以及第 17 题桥梁建造中的“桥墩造价”(考查函数模型、导数与函数在实际问题中的应用), 都充分扎根于生活, 服务于实际, 很好地考查数学知识与创新意识.

例 3 (2020 年高考数学江苏卷第 9 题) 如图 1, 六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的. 已知螺帽的底面正六边形边长为 2cm, 高为 2cm, 内孔半径为 0.5cm, 则此六角螺帽毛坯的体积是\_\_\_\_\_  $\text{cm}^3$ .

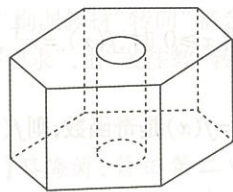


图 1

解析: 根据题目条件可知此六角螺帽毛坯的体