

- ①当 $\lambda \leq 1$ 时,有 1 个零点;
 ②当 $1 < \lambda \leq 3$ 时,有 2 个零点;
 ③当 $3 < \lambda \leq 4$ 时,有 3 个零点;
 ④当 $\lambda > 4$ 时,有 2 个零点.

若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点,则 λ 的取值范围是 $(1, 3] \cup (4, +\infty)$.

说明:从核心素养的角度来说,本题主要涉及数学学科中的直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养.第(1)问可直接解不等式得到 x 的解集,亦可作出分段函数的函数图形,通过观察函数零点的位置来得到解集.本小题主要考查学生对基本知识与基本方法的掌握.第(2)问随 λ 值的变化,分段函数的图象也会发生相应的动态变化.考生需要理解图象动态变化的过程,这种直观想象的过程必须在日常教学中进行渗透,方可让学生在考试中做到有备无患.本题综合而言难度不是很大,解答思路也比较直接,教师在教学中需要不断进行渗透及强化,让学生做到不丢分.

二、整体代换

问题 2:已知 t 为常数,函数 $y = |x^2 - 2x - t|$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值为 2,则 $t =$ _____.

分析:本题的绝对值中为二次函数,若对二次函数的正负性进行讨论,其对考生逻辑思维的要求相当高.笔者曾经做过测试,发现学生都是从讨论二次函数的视角逐一分析,这样的困难在于小题大做,大大浪费了时间,而且违背了命题者真正的意图.其实从整体换元的角度入手,可以将其降维到数轴上,利用一维绝对值来解决问题.

令 $s = x^2 - 2x \in [-1, 3]$,将原来问题转化为 $y = |s - t|$, $s \in [-1, 3]$, y 的最大值为 2,求 t 的值.

如图 3,易得 $t = 1$.

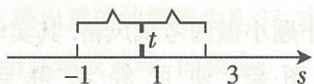


图 3

问题 3:已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \left| x + \frac{4}{x} - a \right| + a$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值是 5, 则 a 的取值范围是 _____.

分析:本题与问题 2 类似,通过换元变复杂函数为简单函数,通过绝对值的几何意义,即距离对问题进行解答.

令 $t = x + \frac{4}{x} \in [4, 5]$, 则原问题转化为函数 $y = |t - a| \leq 5 - a$ 在 $t \in [4, 5]$ 上恒成立.

显然,当 $a > 5$ 时不成立;

当 $a \leq 5$ 时,即 $y = |t - a| \leq 5 - a$.

如图 4,易得 $a \leq \frac{9}{2}$.

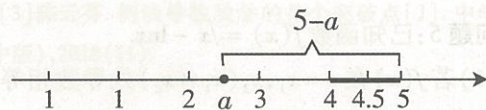


图 4

说明:问题 2、问题 3 呈现的是学生最为恐惧的题型,分别在二次函数和对勾函数外加上了绝对值,伴随着参数的变化,函数图象便发生了较为复杂的变化.本题型除了呈现数学学科中的直观想象、数学运算等核心素养以外,还包含着对逻辑推理、数学抽象素养的培养.学生在解决此类问题时,若采用直接作图的形式,显然是行不通的.本题型的核心便是理解 $|x - a|$ 即为数轴上横坐标为 x 的点与横坐标为 a 的点之间的距离.通过逻辑分析对 $x^2 - 2x$, $x + \frac{4}{x}$ 进行换元,将二维图形抽象到一维数轴上来,再通过“距离”便可轻易解答.这样的逻辑推理与数学抽象需要学生对数学知识有全面的认识和灵活运用能力,教师在教学中更需要重视对学生思维的培养,重视学生思想方法的发生、生成、内化和升华的过程,这是数学基本功中的“内力”,并非一朝一夕能够改变的,需要细水长流,才能让核心素养得以落实.

三、心中有图

问题 4:若函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则 $M - m$ ().

- A. 与 a 有关, 且与 b 有关
 B. 与 a 有关, 但与 b 无关
 C. 与 a 无关, 且与 b 无关
 D. 与 a 无关, 但与 b 有关