

数学单元结构教学的四种模式^①

喻 平

(南京师范大学数学科学学院 210046)

虽然单元教学并不是一个新概念,但近年来,单元教学的文章不断涌出,可谓是单元教学的时代复兴.因为,它与发展学生核心素养的教育旨趣有千丝万缕的联系,因而它必然会走到教学改革的前台.

为什么指向发展学生核心素养的教学提倡单元教学?崔允漷教授说得比较直观:学科核心素养是学科教育之“家”,指学生学了本学科之后逐步形成的关键能力、必备品格与价值观念.它意味着教学目标的升级,而“逐个”知识点的“了解”“识记”“理解”等目标从此退出历史舞台.新的教学目标关注学生运用知识做事、持续地做事、正确地做事,强调知识点从理解到应用,重视知识点之间的联结及其运用.由此看来,学科核心素养的出台倒逼教学设计的变革,教学设计要从设计一个知识点或课时转变为设计一个大单元^[1].

事实上,数学核心素养的成分难以在单个的知识点上表现出来,它往往隐藏在知识体系、知识结构之中.例如,数学抽象是一个对象在另一个对象属性基础上的抽象过程,也就是说,只有在知识的联系中才能有数学抽象过程,无他也无我,显然,数学抽象离不开知识之间的联系,离不开知识的体系.因此,发展学生的数学核心素养,就应当着眼于知识结构的教學,这样才利于素养的生成、发育和成长,其中,单元教学就应当是一种有效的教学方式,因为一个单元就是一个思想体系、方法体系、知识体系.

就数学单元教学而言,对发表的而且比较有代表性的文章作梳理,可以看到研究者主要关注几个方面:(1)学理层面.单元教学设计的依据^[2]、设计的策略^[3],单元教学设计的价值指向^[4],单元

教学设计的路径^[5],等等.单元教学设计层面的学理分析往往与当下时髦的口号“核心素养”“深度学习”等密切相联.(2)概念层面.何为单元?何为单元知识结构?^[6]何为数学单元教学设计的内涵?^[7],事实上,几乎每一篇单元教学的文章都会涉及这些问题,显得讨论有点喋喋不休.(3)设计层面.单元教学的结构、操作流程等^{[7][8]}.(4)应用层面.这类文章主要是针对具体的教学内容来论述单元教学的具体设计和操作,作者多是来自中小学教师群体.

本文不论及单元教学形而上的宏观层面问题,直接提出数学单元教学的四种模式,关注单元教学的可操作性,当属上述的“设计层面”和“应用层面”之列.

1 以问题解决过程线索为主题的单元教学模式

1.1 基本结构

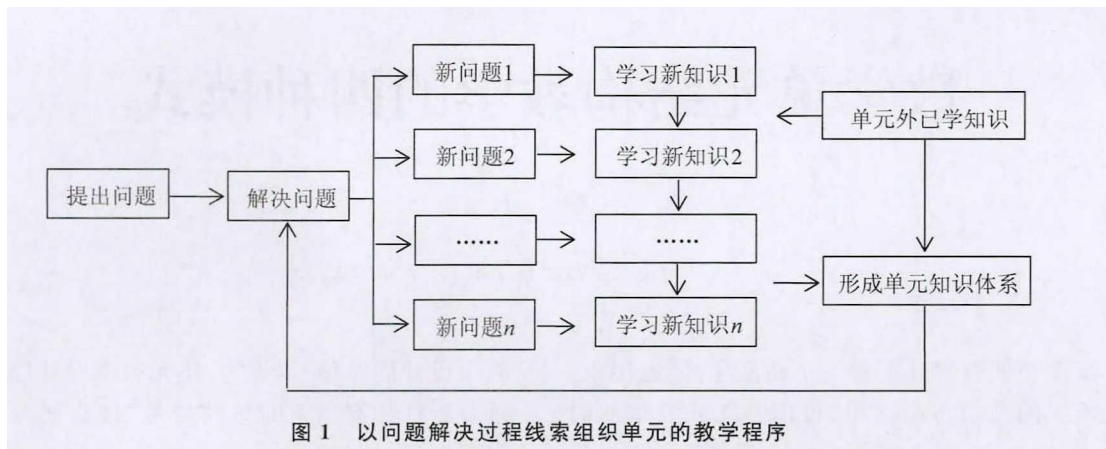
以问题解决过程线索为主题组织单元,是指在解决问题的过程中可能会出现许多新问题,然后以这些新问题串为主线展开研究进而产生新知识学习的单元教学设计.这种设计一般用于新授课的教学.

数学中的许多概念、命题是由于解决问题的需要而产生和发展的.但是,教材的编写往往考虑从知识的逻辑结构来组织内容,教材中的知识都是以结果的形式陈述,并不反映这个知识的产生过程.这样的处理方式,往往使教材中知识展示的顺序与历史上产生这个知识的过程是相反的.以问题解决过程作为单元教学的主题,就是将其倒过来,从解决问题入手,分析可能产生的概念和命题,厘清知识产生缘由,还原知识形成的过程.

以问题解决过程线索组织单元的基本结构见

① 国家社科基金教育学一般课题“中学生学科核心素养的评价研究”(课题批准号:BHA170150)

图 1.



其教学过程是：①教师提出问题，也可以是教师引导学生提出问题。②在教师的引导下，学生解决问题。③在解决问题的过程中，可能会分解出一系列新的子问题，而这些新问题是学生已具备的知识基础无法解决的，于是引发出一些新的知识点，教师梳理出新的知识点，设计学习序列。④分别学习新知识，这些新知识有先后顺序，前面的知识是后面的基础。在新知识的学习过程中，会用到单元外学生已经学习过的旧知识。⑤各个新知识学完之后，形成本单元的知识体系，并用新知识去解决原始问题和新的问题。

1.2 教学案例

案例 1 二次函数的单元教学设计

在《义务教育课程标准实验教科书数学九年级(下)》^[8]中，二次函数的内容由二次函数、二次函数的图象与性质、二次函数与一元二次方程、二次函数的应用、数学活动等 4 个部分组成，并由这个顺序展开。

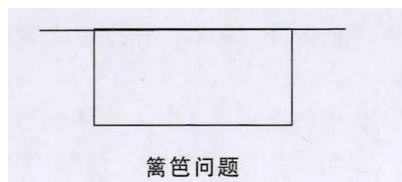
如果采用单元设计，那么可以考虑以问题解决过程为主线来组织单元内容。

首先，给出 3 个问题。

问题 1：如图，用 20 米的篱笆靠墙围矩形菜地，当矩形的长与宽各是多少米时其面积恰好为 18m^2 。

问题 2：如图，用 20 米的篱笆靠墙围矩形菜地，当矩形的长与宽各是多少米时其矩形的面积最大？这个最大面积为多少平方米？

问题 3：如图，用 20 米的篱笆靠墙（限长 8 米）围矩形菜地，当矩形的长与宽各是多少米时其矩形的面积最大？这个最大面积为多少平方米？



通常这一问题是在本单元的知识学习完后，放到二次函数的应用一节中出示，因为这个问题的解决会用到二次函数的许多重要知识：配方法求最值、利用性质求最值、求最值要考虑自变量的取值范围、二次方程与二次函数的关系等。现在把教学内容的次序倒过来，先让学生去解决这个问题，然后再引入知识。

问题 1 是一元二次方程应用题，设篱笆的一条边长为 $x\text{m}$ ，得到 $(20-2x)x=18$ ，解得 $x=9$ 或 $x=1$ 。这是一个二次方程问题，学生容易解决。

对于问题 2，学生可能会尝试用不同的方法解决。例如，可用枚举法求解二元不定方程，设矩形面积为 y ，则 $y=(20-2x)x=20x-2x^2$ 。当 $x=5$ 时，矩形的面积最大为 50m^2 。通过枚举，还会发现在 $x=5$ 两边取对称值， y 的值都相等（对研究函数的图象有暗示作用）。也可以通过列代数式，发现它与二次方程很相似，于是试用二次方程配方求公式的方法来求得出答案。 $y=-2x^2+20x=-2(x^2-10x)=-2[(x-5)^2-25]=-2(x-5)^2+50$ ，当 $x=5$ 时，最大面积为 50。

对于问题 3，用同样的方法就不能解决问题了，因为篱笆靠墙的一边有了长度不超过 8m 的限制，于是对 x 的取值范围有了限制，要满足 $0<20-2x\leq 8$ ，即 $6\leq x<10$ ，因此 x 不能取 5。此时，可以借助表格作取值分析，看到在 x 的取值范围

内, y 随着 x 取值的变小而变大, 于是, 确定当 $x=6$ 时, 面积 y 达到最大值为 48m^2 .

在解决这个问题过程中, 出现了一系列要思考的问题: ①遇到了一个以前没有见过的函数 $y=-2x^2+20x$, 这种函数与解决现实问题有关系, 因此, 我们应当研究这种函数; ②与一次函数类比, 这个新的函数会有什么性质呢? 这些性质可能与解决上面的问题有关系; ③与一次函数类比, 这个新函数的图象是什么样子? 函数的图象可能与解决上面的问题有关系; ④这种函数与一元二次方程太相似了, 它们之间有什么关系? 于是, 以解决这个问题为主线, 展开了研究这个单元知识的思路.

1.3 教学策略

(1) 问题设计合理

问题应当尽量体现贯穿于整个单元的知识内容. 一个好的问题要能够产生与将要学习的知识之间内在的联系, 形成串联单元知识的经脉. 同时, 在问题的解决的过程中要能够引发学生的思考, 充分调动学生的学习动机.

(2) 明示单元内容

单元教学的第一节课, 通过问题引入和问题解决, 教师要对产生的子问题进行归类, 并指出要解决这些子问题可能涉及到的新知识, 可以用有向概念图给学生展示本单元的知识学习路径, 使学生对本单元的学习有一个明确的大目标. 先有全景再学细节, 先观森林再见树木, 这种方式利于知识的同化和顺应.

(3) 不忘回溯起点

单元内容的学习源于问题, 学习完单元的内容之后, 应当有一个回溯本源的环节, 即回头解决当初的问题, 并由这个问题引发出更加一般、更加广泛的新的问题, 运用习得的系统单元知识去解决这些问题, 这是一个前后照应又不断深化的教学过程.

2 以建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学模式

本文不对数学学习心理的 CPFS 结构理论作详细介绍, 读者可以参阅《数学学习心理的 CPFS

结构理论与实践》^[10], 这里只是作一个简单介绍.

个体的 CPFS 结构是指数学知识在头脑中的表征形式, 分为概念域、概念系、命题域、命题系四种形式. 具体地说, ①如果个体头脑中形成了关于某个概念 C 的所有等价定义结构(称这个结构为图式), 那么就称这个个体形成了概念 C 的概念域(concept field). ②如果个体头脑中形成了关于某个概念 C 的网络结构(网络中概念之间存在强抽象、弱抽象、广义抽象关系之一), 那么就称这个个体形成了概念 C 的概念系(concept system). ③如果个体头脑中形成了关于某个命题 P 的所有等价命题图式, 那么就称这个个体形成了命题 P 的命题域(proposition field); ④如果个体头脑中形成了关于某个命题 P 的网络结构(网络中命题之间存在推出关系); 那么就称这个个体形成了命题 P 的命题系(proposition system). 将概念、命题、域、系四个英文单词的第一个字母取出组成 CPFS.

2.1 基本结构

以建立 CPFS 为主题的单元教学设计, 是指以某个概念为中心, 探究并得到与这个概念等价或有抽象关系(强抽象、弱抽象、广义抽象)的概念, 或以某个命题为中心, 探究并得到与这个命题等价或有推出关系的命题, 并将这一组概念或命题用于解决一类问题的教学设计. 这种设计一般用于复习课的单元教学.

数学核心素养的形成不能脱离数学问题解决, 逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析都与解决数学问题息息相关、密不可分. 基于此, 以建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学应当是一种发展学生数学核心素养的有效教学模式.

以建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学设计, 往往是突破了章节的限制, 是对不同章节内容的一种整合, 这样可以贯通知识之间的联系, 塑造学生完整的认知结构.

以建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学结构 1 见图 2.

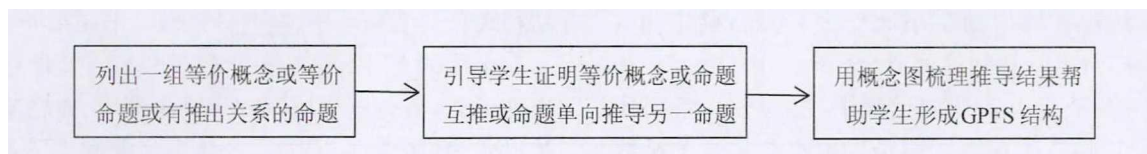


图2

教学过程为:①某一章节的内容学完后,或不同章节但内容相近的学习结束后,由教师列出这些内容中的相关概念或命题或典型的习题,这些概念、命题、习题之间有推出关系.②教师引导学生用推理的方法去寻找概念的等价定义、命题的等价命题.③师生共同梳理这些概念、命题、习题之间的关系,用有向图表示出来,帮助学生形成完善的 CPFS 结构.

例如,平行线的判定与性质学完后,可以组织一次单元教学.三条性质定理与三条判定定理分别互为逆命题,它们是满足充要条件的,因此三条判定定理均可作为平行线的定义,它们之间是相互等价的,于是帮助学生形成平行线的概念域,同时三者又是等价命题,因而可形成命题域.

以建立个体 CPFS 结构为主题的单元教学结构 2 见图 3.

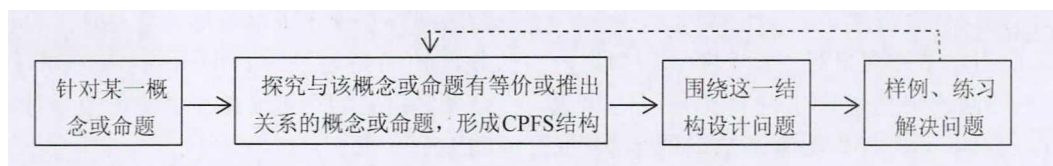


图3 以建立 CPFS 结构为主题的单元教学结构 2

教学过程为:①教师提出一个学习过的概念或命题,引导学生探究与这个概念或命题的等价概念或等价命题,再探讨与这个概念存在强抽象、弱抽象、广义抽象的概念,或探讨与这个命题存在推出关系的命题,填写知识结构表.②教师展示事先设计好的、与学生要形成的 CPFS 结构相关的一组问题.③师生共同解决问题.④教师引导学生反思,增补知识结构表,促进学生形成完善的 CPFS 结构.

在几何学习中,可以按照问题的目标进行分类,这个目标与一些概念或命题存在内在联系.例如,按照题目的结论可分为:证明线段相等问题,证明线段垂直问题,证明角相等问题,证明直线平行问题,证明异面直线垂直问题,证明平面平行问题,证明平面垂直问题……,然后围绕与这些结论相关的概念和命题设计教学.事实上,结果相同、条件各异的命题之间往往有内在联系,这种联系体现在或者它们之间可以相互推出即等价关系,或者一个命题可以由其他命题推出,或者一个命题可以推出其他命题,如果学生形成了这一组命题的 CPFS 结构,那么他们就能够很快地在结果相同、条件各异的命题找到合适命题解决问题.

2.2 教学案例

案例 2 以“证明线段相等”为主题的单元教学设计.

这个问题的单元设计步骤:①组织学生回忆并梳理与证明线段相等的定理(包括定义)有哪些,用一个表格罗列出来.②建立这些知识点的概念图.③教师精心设计题组进行训练.

表1 平面几何范围内与线段相等的部分命题

序号	命题
1	全等三角形判定定理(SSS, SAS, ASA, AAS, HL)
2	如果一个三角形有两个角相等,那么这两个角所对的边也相等.
3	线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.
4	平行四边形的对边相等.
5	平行四边形的对角线互相平分
6	三角形的中位线与第三边平行且等于第三边的一半
7	矩形的对角线相等.
8	菱形的四条边都相等.

续表

序号	命题
9	正方形的四条边都相等
10	如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等,那么在其他直线上截得的线段也相等.
11	经过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边.
12	经过梯形一腰的中点与底平行的直线必平分另一腰.
13	同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形.
14	三个角相等的三角形是等边三角形.
15	垂直于弦的直径平分这条弦.
16	从圆外向一个圆所引的两条切线长相等.

事实上,这个例子反映的本质也是培育学生头脑中完整的 CPFS 结构,即形成良好的概念域、概念系、命题域和命题系.个体的 CPFS 结构是数学关键能力生长的沃土,要保证沃土的优良性,就应当不断施肥,以问题解决的类型特质作为单元主题教学,起到的就是施肥的功能和作用.

2.3 教学策略

(1) 逐步完善结构

开始列出的知识结构表,不一定全面,可能是有遗漏的,目的是启发学生来修补和完善,形成一个逐步生长的知识树.同样,方法表也采用逐步增添的方式,因为即使是问题目标相同,解决问题的方法也可能大相径庭.对知识结构表的不断完善,学生可以在“反思”阶段进行.

(2) 精心设计题组

CPFS 结构形成涉及的概念或命题,它可能来自不同章节也可能涉及不同学段的内容,因此,题目的选择是综合性、跨越性的问题.例如,与证明线段长度相等概念或命题可能来自平面几何、立体几何和解析几何.教师在设计题目时,要眼界开阔,广泛收集,精心组题.

(3) 注重反思训练

教师要注意培养学生的反思意识,提高反思能力.反思包括对解决问题方法的反思,思考解题方法的合理性,思考是否还有更好的方法;对问题本身的反思,思考问题是否可以变式,是否可以推

广;对解决问题要用到的知识的反思,思考解决这个问题除了用知识点一,还能用知识点二吗?等等.

3 以概念生长作为主题的单元教学模式

3.1 基本结构

以概念生长作为主题的单元教学,是指由概念生长新的概念或命题为主线贯穿单元来组织知识学习的教学设计.这种设计可以用于新授课也可以用于复习课.有些概念的“出度”较大,可称为核心概念,这种概念的基本性程度高,由它可以生长出其他概念.

核心概念的生长有两层涵义.

第一,概念 C 本身是一个基本概念,它自身不具有生长性,但是,随着情境的不同、研究对象所处的结构不同,由概念 C 导出了更多的概念和命题,此时我们也将其理解为概念 C 是一种生长过程.例如,在几何中“平行”和“相等”是两个核心概念,如果讨论平面上三条直线的位置关系,利用平行和相等概念可以刻画平行线的判定和性质定理.如果讨论四条直线的位置关系,那么可以刻画四边形的相关性质:两组对边平行的四边形是平行四边形;有且只有一组对边平行的四边形叫做梯形.而且,由平行和相等的概念,可以导出平行四边形及梯形的若干性质,再由此进一步引申出菱形、矩形、正方形、等腰梯形等概念和命题.“平行”和“相等”是两个基本概念,它本身没有生长,但随着图形的生长体现出它们自身也在“生长”,它们往往是两个存在数学抽象关系的概念之间的连接词,是对数学抽象关系的具体刻画.

第二,通过扩大和缩小核心概念 C 的外延和内涵,产生了一些与概念 C 密切相关的新的概念,此时我们说概念 C 得到了生长.也就是说,如果两个概念之间是强抽象关系或弱抽象关系,那么后一个概念都是前一个概念的生长结果.其实,从这个意义上说,数学领域中研究的许多问题都是概念生长的问题.函数到连续函数到可微函数;平行四边形到菱形到正方形;全等三角形到相似三角形到位似三角形等等,均是概念生长过程.

以概念生长为主题组织单元的教学结构见图 4.

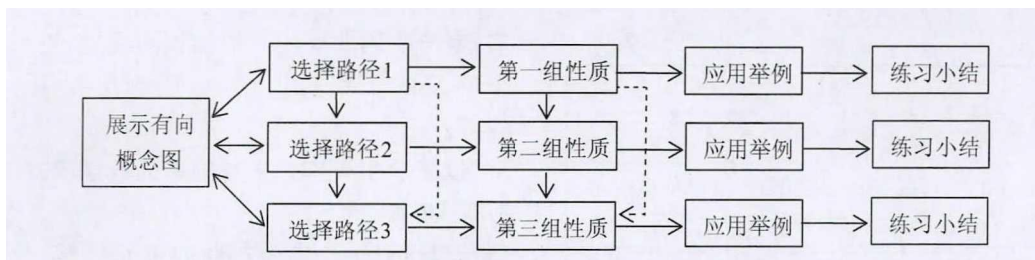


图4 以核心概念发展为主题组织单元的教学结构

教学过程为：①教师展示事先设计好的概念发展有向概念图，给学生明示本单元要学习的内容和路径。②在概念图中选择路径1，研究由路径1产生的一组性质（记为 S_1 ），然后教师举例，学生练习，教师小结。③回到有向概念图，选择路径2，研究由路径2产生的一组性质（ S_2 ），在这个过程中，可能会用路径2中的一些元素，得到性质 S_2 时也可能用到性质 S_1 。然后教师举例，学生练习，教师小结。④回到有向概念图，循环这个过程，直到把有向概念图中的所有路径都走完，完成单元学习。

要说明两点：

第一，路径是指有向概念图中起点到终点的所有路。例如，图5是四边形单元的概念图，其路径有4条：①四边形→平行四边形→矩形→正方形；②四边形→平行四边形→菱形→正方形；③四边形→梯形→等腰梯形；④四边形→梯形→直角梯形。

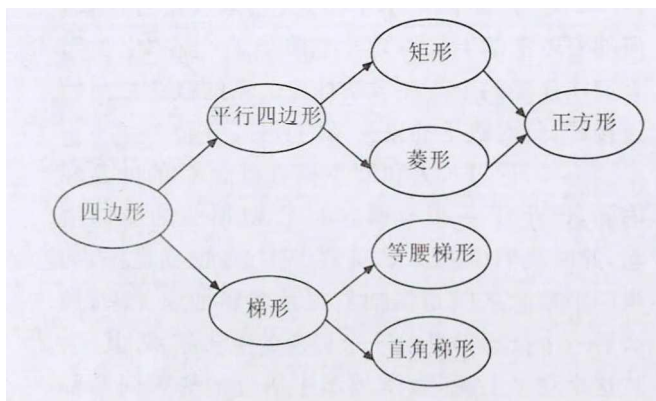


图5 四边形的单元有向概念图

第二，在有向概念图中，路径的生成有两种方式。一是由原始概念本身产生，即两条路径都起源于原始概念，例如图5中的路径①和路径③。二是后一条路径由前面某些路径生成的概念而生成，或者由前面已经学习过的一组概念去生成，也包

括原始概念。例如图4中的路径②，此时菱形的概念并不需要回到四边形这个原始概念，只需从平行四边形作为起点即可。

3.2 教学案例

案例3 以“函数奇偶性的图象对称性概念”为主题的教学设计。

整个教学围绕下面概念生长过程为主线展开。

定义：在定义域内，如果 $f(-x) = f(x)$ ，那么 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称；如果 $f(-x) = -f(x)$ ，那么 $f(x)$ 的图像关于原点对称。

这是偶函数和奇函数的定义或性质，现以这两个性质为生长点去引申出其他相关函数的性质。因为如果函数 $f(x)$ 为偶函数，那么将自变量 x 换成它的相反数，其函数值不变。所以 $f(x)$ 的图像必然关于 y 轴对称。

思考：① y 轴的方程应当怎么表达？②由偶函数的图像关于 $x=0$ 对称，你能联想到什么？是否存在图像关于 $x=m$ ($m \in \mathbf{R}$) 对称的函数？你能举出这类函数的实例？

此时学生会联想到二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图像关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称。

思考：除了二次函数之外，是否还有具有这一性质的其他函数？

还可举出诸如 $f(x) = |x - m|$, $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f(x) = (x - m)^4$ 等函数。

思考：这类函数的图像存在共性，那么它们的函数表达式也必然有共性，你能否根据偶函数的定义去找出这种共性。

这里体现了一种类比引申，由 $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(0-x) = f(0+x)$ ，容易猜想出命题；学生也可以从具体的函数去观察，归纳出命题。

命题1：如果在定义域内，恒有 $f(m+x) =$

$f(m-x)$, 那么函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=m$ 对称.

思考: 你能证明这个命题吗?

证明: 设点 $P(x, f(x))$ 是函数 $f(x)$ 图像上任意一点, 则 P 关于直线 $x=m$ 的对称点为 $P'(2m-x, f(x))$. 由于 $f(2m-x)=f(m+(m-x))=f(m-(m-x))=f(x)$, 所以点 P' 也在函数 $f(x)$ 的图像上. 因此, 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=m$ 对称.

思考: 在命题 1 中, 函数 $f(x)$ 满足的方程为 $f(m+x)=f(m-x)$, 即左右两边均含同一个数 m , 你能否改变这一条件而得到一个更一般的结论吗?

命题 2: 如果在定义域内, 对任意的 x 均有 $f(m+x)=f(n-x)$, 那么函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{m+n}{2}$ 对称.

思考: 能否参照命题 1 和命题 2 的产生过程, 作为类比, 奇函数的概念也能推广吗?

由学生去探索, 发现并证明下面两个命题.

命题 3: 在定义域内, 如果对任意的 x , 满足 $f(m+x)=-f(m-x)$, 那么函数 $f(x)$ 在图像关于点 $M(m, 0)$ 成中心对称.

命题 4: 在定义域内, 如果对任意的 x , 满足 $f(m+x)=-f(n-x)$, 那么函数 $f(x)$ 在图像关于点 $M(\frac{n+m}{2}, 0)$ 成中心对称.

在此基础上, 可以引导学生进一步去探讨与两个函数有关的性质, 得到如下若干命题:

命题 5: 函数 $y=f(m+x)$ 与函数 $y=f(m-x)$ 的图像关于直线 $x=0$ 对称.

命题 6: 函数 $y=f(m+x)$ 与函数 $y=f(n-x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{n-m}{2}$ 对称.

命题 7: 函数 $y=f(m+x)$ 与函数 $y=-f(m-x)$ 的图像关于直线原点成中心对称.

命题 8: 函数 $y=f(m+x)$ 与函数 $y=-f(n-x)$ 的图像关于点 $(\frac{n-m}{2}, 0)$ 对称.

有了上面命题之后, 可以组织一组题目进行练习.

这个例子充分体现出奇函数和偶函数概念的生长过程, 表现出整个教学的探究过程, 可以培养

学生的数学抽象、直观想象和逻辑推理能力.

3.3 教学策略

(1) 分支推进策略

分支推进的意思是在概念图中, 从一级概念开始, 选择每一条路径依次教学, 例如, 图 5 中, 依次选择路径①、②、③、④进行教学. 如果路径有重复部分, 就不用再回到路径的起点, 从重复部分的末点作为教学的起点. 在图 5 中, 路径①走完之后, 路径②就以“平行四边形”为起点.

分支推进策略与奥苏伯尔提出的“不断分化”教学原则是一致和同含义的.

(2) 横向贯通策略

概念图一般是一种树状结构, 但知识点之间往往有纵向关系, 概念图很少揭示知识之间的横向关系, 因此, 在教学中要认真分析, 如果两个概念有横向联系, 就应当将其联系起来. 横向联系有的可能是直接的, 有的可能是间接的, 如果间接关系, 就可考虑用知识点将两个概念联系起来, 这个知识点往往是两个对象所共同具有的性质. 例如, 图 5 中, 平行四边形与梯形之间, 可以用中位线定理联系两者; 矩形和菱形有共同的性质: 中心对称图形; 矩形和等腰梯形有共同性质: 对角线相等.

横向贯通可以使知识结构更加完善, 这一策略与奥苏伯尔提出的“综合贯通”教学原则殊途同归.

4 以数学思想方法解决问题为主题的单元教学模式

4.1 基本结构

以数学思想方法解决问题作为主题组织单元, 是指以解决问题的某种思想方法为主线来组织单元内容的教学设计. 其实与我们平时所说的“多题一解”如出一辙, 即用一种方法解决不同类型的问题. 这种单元设计适合于复习课.

波利亚构建的几个典型解题模型: 双轨迹模式、笛卡尔模式、递归模式、叠加模式^[11], 其实就是以数学方法为骨架来建构的, 可以为单元教学设计提供参考.

以数学思想方法解决问题为主题组织单元的教学结构如图 6.

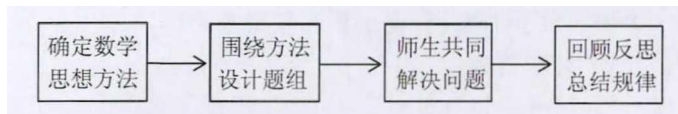


图6 以数学思想方法解决问题为主题组织单元的教学结构

教学过程为:①对所学过的内容,综合考虑,选择可以贯穿这些学习内容的数学思想方法作为单元设计的骨架.②围绕选定的思想方法,精心设计一组题目,题目可以是不同章节、不同领域的问题.③教师出示问题,并组织学生采用独立方式或合作讨论方式去解决问题,教师再作归纳、提炼、小结.接着提出第二个问题,采用相同程序解决问题.④一组题目解决结束后,组织学生对这一组问题的解决过程进行反思,总结这类问题解决的共同规律,加深对数学思想方法的理解.

4.2 教学案例

案例4 以“方程思想方法解决问题”为主题的单元设计.

这个设计的关键是要组织一组题目,它们都可以用方程思想来思考,用方程方法解决问题.下面是一组这类题目.

题1:设 a, b, c 为实数.求证: $(b-2a+c)^2 \geq 3(a-2b+c)(a-c)$.

分析:观察要证明的结论,它的结构有点像一元二次方程类别式.尝试构造如下方程:

$$(a-2b+c)x^2 - 2(b-2a+c)x + 3(a-c) = 0,$$

当 $a-2b+c \neq 0$ 时,这是一个一元二次方程,易见 $x=-1$ 是它的一个实数根,所以判别式 $\Delta \geq 0$,故结论成立.当 $a-2b+c=0$ 时,结论显然成立.

题2:已知实数 a, b, c 满足 $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$,求证: a, b, c 中至少有一个等于1.

分析:已知条件可改写为

$$a+b+c = \frac{ab+bc+ca}{abc} = 1,$$

稍作变形,已知条件又可改写为

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ ab+bc+ca=m, \\ abc=m(m \neq 0), \end{cases}$$

由韦达定理的逆定理知道 a, b, c 是方程 $x^3 - x^2 + mx - m = 0$ 的三个根.而 $x=1$ 显然是其中一个

根,故知 a, b, c 中至少有一个是1.

题3:已知一等差数列前 k, l, m 项的和分别是 S_k, S_l, S_m .求证:

$$\begin{vmatrix} k & k^2 & S_k \\ l & l^2 & S_l \\ m & m^2 & S_m \end{vmatrix} = 0.$$

分析:把已知条件按等差数列求和公式写出,可以得到

$$\begin{cases} 2ka_1 + k(k-1)d - 2S_k = 0, \\ 2la_1 + l(l-1)d - 2S_l = 0, \\ 2ma_1 + m(m-1)d - 2S_m = 0, \end{cases}$$

其中 a_1, d 分别为等差数列的首项和公差.

联想到线性方程组,可以看出 $2a_1, d, -2$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} kx + k(k-1)y + S_kz = 0 \\ lx + l(l-1)y + S_lz = 0 \\ mx + m(m-1)y + S_mz = 0 \end{cases}$$

的一个非零解,由齐次线性方程组的性质立即可得结论.

题4:如图7,已知 P 是正方形 $ABCD$ 外接圆上任意一点.求证:

$$(1) PA + PC = \sqrt{2}PB;$$

$$(2) PA \cdot PC = PB^2 - AB^2.$$

观察发现待证明的两个式子的左边与韦达定理的形式相近,那么是否可以构造出这样的一元二次方程呢?

注意到 $\angle APB = 45^\circ$,在 $\triangle APB$ 中,由余弦定理,得

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cos 45^\circ,$$

$$\text{即 } PA^2 - \sqrt{2}PB \cdot PA + PB^2 - AB^2 = 0. \quad (1)$$

在 $\triangle PBC$ 中,也有

$$BC^2 = PC^2 + PB^2 - 2PC \cdot PB \cos 45^\circ,$$

由 $BC=AB$,得

$$PC^2 - \sqrt{2}PB \cdot PC + PB^2 - AB^2 = 0. \quad (2)$$

①和②说明,当 $PA \neq PC$ 时, PA, PC 是方程

$$x^2 - \sqrt{2}PB \cdot x + PB^2 - AB^2 = 0$$

的两个根,

因此 $PA + PC = \sqrt{2}PB; PA \cdot PC = PB^2 - AB^2$.

当 $PA=PC$ 时(即 P 点与 D 点重合),

可知 $PA=PC=AB$,结论也成立.(下转第15页)

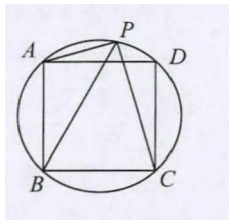


图7

参考文献

- [1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017
- [2] Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1996, 27(3): 293-309
- [3] Singer, F. M. et al. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions [J]. Educational Studies in Mathematics, 2013, 83:1-7
- [5] 仓万林, 史嘉. 随风潜入“卷”, 润“题”细无声[J]. 数学通报, 2015, 54(6): 46-50
- [6] 史嘉. 2015年“数学文化高考题”分类欣赏[J]. 数学通讯, 2015(12): 46-49
- [7] 孙庆括. 近十年高考数学文化命题的特征分析及启示[J]. 数学通报, 2017, 56(1): 49-54
- [8] 陈莎莎, 汪晓勤. 2007—2016十年间基于数学史的高考试题分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(5): 26-33
- [9] 祁平等. 基于数学文化视角的命题研究[J]. 数学通报, 2018, 57(9): 19-24
- [10] 李隽易. 数学文化题编拟研究[J]. 数学通报, 2018, 57(9): 25-28
- [11] 李汝雁, 郭要红. 2018年高考数学文化试题的评析与教学建议[J]. 数学通报, 2018, 57(9): 29-31
- [12] Heath, T. L. A History of Greek Mathematics [M]. Cambridge: The University Press, 1921.
- [13] 汪晓勤. 中学数学中的数学史[M]. 北京: 科学出版社, 2002
- [14] Heath, T. L. The Works of Archimedes. Cambridge: The University press, 1897

(上接第8页)

题5: 在 $\triangle ABC$ 中. 求证: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$.

分析: 此题若用三角公式变形, 运算会比较复杂. 构造一个方程

$$x^2 + 2x\cos B\cos C + \cos^2 B + \cos^2 C - 1 = 0, \quad (1)$$

则根的判别式

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\cos^2 B\cos^2 C - 4(\cos^2 B + \cos^2 C - 1) \\ &= 4(1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) = 4\sin^2 B\sin^2 C \end{aligned}$$

因此方程①的根为

$$x = -\cos B\cos C \pm \sin B\sin C = -\cos(B \pm C).$$

取其中的一个根 $x = -\cos(B+C) = \cos A$ 代入, 既得 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$.

上面5道题目, 以方程思想方法为主线, 组成一个单元教学, 把代数、几何、三角等不同领域的问题用方程思想方法串联起来, 可以起到完善学生认知结构, 培养逻辑推理和数学运算能力.

4.3 教学策略

(1) 鼓励学生讲解

教师给出任务, 学生完成任务, 选择解答问题出现错误的学生和解答问题优秀的学生上讲台, 讲解自己的解题过程, 教师和同学共同评判, 让大家共同分析产生错误的原因, 学习优异的解题思路, 同时可以培养学生数学交流的能力.

(2) 形成方法体系

在“回顾反思总结规律”环节, 教师要分析这组题目的共性, 为什么它们能够被统摄在一种思

想方法之下, 其特点和规律是什么, 突出数学思想方法的价值与功能, 让数学思想方法深入学生心灵, 而不仅仅是为了掌握一些知识. 要强调的是, 思想方法也包括一些解题的技巧, 但解题技巧不是主流, 思想方法层面更高、更普适, 它与发展核心素养密切相关.

参考文献

- [1] 崔允邵. 学科核心素养呼唤大单元教学设计[J]. 上海教育科研, 2019(4): 1
- [2] 邵朝友, 崔允邵. 指向核心素养的教学方案设计: 大观念的视角[J]. 全球教育展望, 2017(6): 11-19
- [3] 李润洲. 指向学科核心素养的教学设计[J]. 课程·教材·教法, 2018(7): 35-40
- [4] 朱先东. 指向深度学习的数学整体性教学设计[J]. 数学教育学报, 2019(5): 33-36
- [5] 章飞, 顾继玲. 单元教学的核心思想与基本路径[J]. 数学通报, 2019(10): 23-28
- [6] 徐文彬, 李永婷, 安丹诺. 单元知识结构整体教学设计模式的理论建构[J]. 江苏教育(中学教学), 2018(6): 7-9
- [7] 吕世虎, 杨婷, 吴振英. 数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J]. 当代教育与文化, 2016(4): 41-46
- [8] 李磊, 安桂清. 以单元为单位进行整体教学设计[J]. 人民教育, 2019(1): 52-55
- [9] 杨裕前, 董林伟主编. 义务教育课程标准实验教科书 数学 九年级(下)[M]. 南京: 江苏科技出版社, 2004: 6-37
- [10] 喻平. 数学学习心理的 CPFS 结构理论与实践[M]. 南宁: 广西教育出版社, 2008: 22-23
- [11] 波利亚. 数学的发现(第一卷)[M]. 呼和浩特: 内蒙古人民出版社, 1980: 14