精心创设情境，培养学生发现、提出问题的能力

◉江苏省江阴中等专业学校　崔永红

心理学认为，思维活跃于疑路的交叉点，即思维活跃于新的有趣的问题急于解决之时，这时学生表现出精神高度集中，情绪高度兴奋.因此，把知识与情境结合起来，让学生在问题情境中学习，有益于促进学生在情境中发现问题、提出问题.本文侧重于通过创设情境，采用多种方法引导学生观察、试验、思考等促使学生形成问题意识，进而发现问题、提出问题.

一、创设数学故事情境，让学生在认知冲突中发现、提出问题

数学故事包括古今中外数学家的故事、名言警句和一些经典的话题等.有些数学故事蕴含着丰富的数学思想与方法，不仅反映数学知识的本质、追溯数学内容、思想和方法的演变、形成与发展过程，而且还探索影响这种过程的各种因素，以及历史上数学科学的发展对人类文明所带来的影响，通过挖掘一些经典故事，引出话题，一方面，能激发学生学习数学的兴趣，有助于学生发现和提出问题；另一方面，还能揭示概念的背景，促进学生理解结论的形成过程.

案例1：反证法的教学情境.

在教学“反证法”时，一位智慧教师首先投影呈现一段古文中的故事，请同学们阅读理解：王某七岁，尝与小儿游，看道旁李树多子折枝，诸儿竞走取之，唯王不动，人问之，答曰：“树在道旁而多子，此必苦李”.取之，信然.就此情境，教师请同学们提出一些问题.

生1：为何此必苦李？

生2：树在道旁为何多子？

生3：王某用什么方法来证明李子是苦的？

师：这三个问题提得很好，这三个问题的核心是哪一个？

生（大部分）：第三个.

师：对！下面就来分析一下第三个问题：“王某用的是什么方法来证明李子是苦的？”

课堂反馈：这个故事激起了大家浓厚的兴趣，同学们迅速从故事情节被引导到研究王某用的是什么方法来证明李子是苦的上.经过2~3位同学的分析，逐步达成共识：这种方法不同于以往的正面考虑（从已知出发进行分析或推理），它是从反面考虑的，如果李子很好吃，那么道路旁这么多易采到的果子应该早就没有了，这与看见的事实“多子”相矛盾，从而得到要证明的结论“此李必苦（涩）”.教师让同学们体会一下，再引导学生定义“反证法”，归纳反证法的推理步骤：反设→归谬→存真.

反证法是一种重要的数学间接证明的方法，其基本思想是“正难则反”，怎么引导学生去体验思想，发现这种方法呢？这位教师以“再创造”的教学观创设了“此李必苦”的故事情境，使学生对新旧知识产生了认知冲突，他们感到有趣、好奇，从而积极思考、分析缘由，发现了反证法，并指出反证法的定义、方法、步骤.要把数学史包括数学故事有效融入数学教学中，教师必须深入理解数学史（故事）的意义，结合教材特点和学生的已有经验，对数学史（故事）资源进行选择、组合、改造与再加工，使学生容易接受、乐于接受，在数学史（故事）中发现问题、提出问题.

二、巧设操作性情境，让学生在亲身体验中发现、提出问题

系统论认为，系统地组织起来的材料所提供的信息，远远大于部分材料提供的信息总和.创造心理学也认为，新的发明创造主要取决于整体性的认知框架的转换，而整体性认知框架的形成则在于对对象整体性的把握，因此对对象的整体性把握是培养创新思维能力的必要条件.为让学生对知识有整体性把握，我们可以根据教学内容创设实际操作情境，让学生人人动手操作或不同角色参与，在解决问题中获取直接经验，产生疑惑和矛盾的“心理”，进而发现问题、提出问题和解决问题.

案例2：直线与平面平行的判定教学情境.

为了让学生发现线面平行的判定定理，笔者让学生进行实验操作.

折纸要求：一张矩形纸片放在桌面上，请大家折纸，观察纸片一边与桌面的位置的关系.

一开始设计时，笔者先让学生随意折，想让学生从“不平行”到“平行”来发现这个定理，但实施后发现，由于问题比较发散，没有达到预期目的，如何设问是关键，这个实验到底如何揭示判定定理的本质呢？于是，为避

免混淆视听，笔者舍弃了“不平行”，直接问学生：如何折才能使纸片一边与桌面平行？

学生操作：由于指令明确，学生折纸，几乎所有学生都能很快找到一条边与桌面平行.

教师问学生：“你们是怎么折出来的？”

生1：将纸对折，这样一边与折痕平行，然后将纸片展开，放到桌面上，这时纸片一边$A'B'$就与桌面平行了，如图1.

一些同学反问：

生2：$A'B'$一定与桌面平行吗？

生3：是不是一条直线与平面内的一条直线平行，这条直线就与平面平行？

生4（回应）：还要加上$A'B'$不在平面$CDEF$上，即$A'B'$在平面$CDEF$外.

生5：那是不是平面外一条直线与平面内的一条直线平行，这条直线就一定与平面平行呢？

这时教室内一片寂静，同学们陷入沉思，通过思考刚才的折纸操作和反思，有些同学发现了用反证法可以证明这个结论是正确的，如图2.

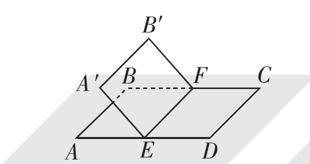

图1

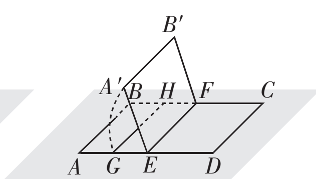

图2

教师巧设了一个折纸实验情境，学生操作后教师追问“你们是怎么折出来的？”学生1的回答，导致某些学生的疑问，同伴的回复、补充说明，再通过反证法的证明，得出了直线与平面平行的判定方法. 整个教学过程从学生的操作开始，学生都是在不确定中发现、存疑、质疑与解疑，学生的学习心理处于一种悬而未决的求知状态中，创新的意识被点燃，虽然不是每个学生都设计出问题，但人人都在发现、思考与探索问题，使数学的再创造成为可能.

三、利用生活情境，让学生在生活经验中发现、提出问题

生活中形成的常识、经验是学习数学的基础，提出一个问题更需要背景性、经验性的感性认识作为支撑. 心理学研究也表明：学习内容与学生的生活背景越贴近，与学生的认知水平越适应，越能诱发学生提出问题的心理倾向，越能增强学生提出问题的意识，进而发现问题、提出问题. 因此，在教学中，为了帮助学生发现问题、提出问题，需要为学生提供较为丰富的经验性材料.

案例3：直线与平面垂直的判定定理的教学情境.

在学习线面垂直的定义后，同学们觉得用定义判定直线与平面垂直很不方便，求简是人类的天性，有没有比较简便的办法？在一次校内研究课上，一位优秀教师设置了如下情境：

如图3，将书打开，放在桌面上；图4是一支架，你能发现并提出什么问题吗？以下是几位学生的对话.

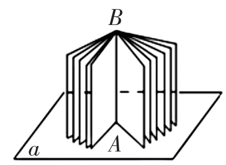

图3

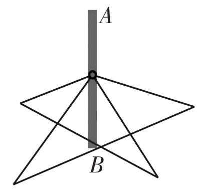

图4

生1：AB与桌面或地面垂直.

生2：为什么呢？

生1：因为直线AB与平面中的两条直线垂直，所以直线AB就与这个平面垂直.

生3：这个不对，如果平面中这两条直线平行，就肯定错了. 比如三角板一边在桌面上，桌面上有无数条直线与另一条直角边垂直，如图5.

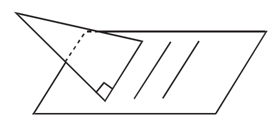
图5

生4：应加上这两条直线相交，即直线AB与平面中的两条相交直线垂直，则直线AB就与这个平面垂直.

师：很好！同学们观察得很细致，分析得也很到位. 在我们的生活中还能找到类似的例子吗？

这时有的同学说，刚栽的树木，为了让它垂直生长，在树的周围加一个支架，就是这个原理. 有的同学现场折纸，放在桌面上，折痕与桌面垂直等.

生5：这个结论怎么证明呢？

这时三、五个同学小声讨论，相互启发，有的同学说用构造法证明，有的同学说用向量法证明，同学们在教师的引导和相互合作中，找到了直线与平面垂直的判定与证明方法.

在该案例中，教师利用学生常见的生活情境，激发了学生兴趣；再通过“你能发现并提出哪些数学问题？”促使学生观察思考，学生根据已有的数学经验提出问题，其他同学在思考、质疑和补充，唤醒了学生的问题意识，提高了学生发现和提出问题的能力.

四、创设开放性情境，让学生在发散思维中发现、提出问题

创设丰富的开放情境，不限定问题发展的方向，有助于拓宽学生的思维空间，放飞想象力，更有助于学生从中发现和提出问题. 开放情境应源于现实，与学生的认知水平相适应，对学生来说是真实可感的. 同时，开放情境应具有一定的挑战性和探究性，让学生全方位、多角度思考，发散联想，充分想象，引发认知 （下转第28页）

2.从特殊到一般是研究数学问题的重要途径

显而易见,(*)式中若 $k=1$ 则就是问题1.对于2017年高考江苏卷19题,考生答卷情况很不理想,我们发现他们解题时没有建立起与课本的联系,所以我们在教学中应该对这一数学规律做建构性探究.

在学生得到 $a_{n-3}+a_{n+3}=2a_n(n\geqslant 4)$ 之后,我们不能戛然停止,然后引用标准答案,我们有必要接着这样叙述:

$a_1,a_4,a_7,a_{10},\cdots,a_{3k-2},\cdots$ 成等差数列,首项为 a_1,公差设为 d_1;

$a_2,a_5,a_8,a_{11},\cdots,a_{3k-1},\cdots$ 成等差数列,首项为 a_2,公差设为 d_2;

$a_3,a_6,a_9,a_{12},\cdots,a_{3k},\cdots$ 成等差数列,首项为 a_3,公差设为 d_3,其中 $k\in\mathbf{N}^*$.

下面要证明数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,只要证明 $d_1=d_2=d_3$,不妨记为 $3d$;且 a_1,a_2,a_3 成等差数列,公差为 d.接着要找 d_1,d_2,d_3,a_1,a_2,a_3 这六个量的关系,只需要找关于它们的五个不同的式子即可.我们发现在②中令 $n=4$ 得到式子 $a_1+a_2+a_3+a_5+a_6+a_7=6a_4$,由 $a_1,a_4,a_7,a_{10},\cdots a_{3k-2},\cdots$ 成等差数列得 $a_1+a_7=2a_4$,所以原式可以化简为 $a_2+a_3+a_5+a_6=4a_4$,与在①中令 $n=4$ 得到的式子一样,故而五个式子全在①中取得.

在①中令 $n=3$,则 $a_1+a_2+a_4+a_5=4a_3$; ⑤

在①中令 $n=4$,则 $a_2+a_3+a_5+a_6=4a_4$; ⑥

在①中令 $n=5$,则 $a_3+a_4+a_6+a_7=4a_5$; ⑦

在①中令 $n=6$,则 $a_4+a_5+a_7+a_8=4a_6$; ⑧

在①中令 $n=7$,则 $a_5+a_6+a_8+a_9=4a_7$. ⑨

一般情况下我们可以将这五个式子用化归的思想转化成关于 d_1,d_2,d_3,a_1,a_2,a_3 的六元一次方程组,求解只要加加减减即可,过程略;另发现:⑧-⑤得 $d_1+d_2=2d_3$⑩,⑨-⑥得 $d_2+d_3=2d_1$⑪,再由⑩-⑪得 $d_1=d_3$,代入⑩得 $d_1=d_2=d_3$,不妨记为 $3d$.由⑥-⑤得 $a_6-a_1=5(a_4-a_3)$,因为 $a_6=a_3+3d$,$a_4=a_1+3d$,所以 $a_3=a_1+2d$,同理⑦-⑥得 $a_2=a_1+d$.至此,若数列 $\{a_n\}$ 既是"$P(2)$数列",又是"$P(3)$数列",则 $\{a_n\}$ 是等差数列得证.

问题3:若数列 $\{a_n\}$ 既是"$P(3)$数列",又是"$P(4)$数列",则 $\{a_n\}$ 还是等差数列吗?

若用参考方案,此问题不好解决,但用上述方法,只不过间隔项再多一项,即未知数再多一对 a_4,d_4 而已,答案是肯定的,过程略.我们还可以得出一般结论:已知 i 是常数且 $i\geqslant 2,i\in\mathbf{N}$,若数列 $\{a_n\}$ 既是"$P(i)$数列",又是"$P(i+1)$数列",则 $\{a_n\}$ 是等差数列.

二、高观点

上述将⑤⑥⑦⑧⑨这五个式子用化归的思想转化成关于 d_1,d_2,d_3,a_1,a_2,a_3 的六元一次方程组,属于解多元一次方程组的问题.我们可以用矩阵(理科附加内容学的是二阶矩阵)来解决.先将多元一次方程组写成矩阵方程 $AX=b$ 的形式,然后方程两边用 A 的逆矩阵左乘,得到 $X=A^{-1}b$.由于研究的是这六个量之间的关系,不是太直观,不妨设 $b_n=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n,n\in\mathbf{N}^*$,则①化为 $b_{n-2}+3b_{n-1}+b_n=0(n\geqslant 3)$,②化为 $b_{n-2}+3b_{n-1}+6b_n+3b_{n+1}+b_{n+2}=0(n\geqslant 3)$.这样不仅能解释参考答案的简单方法,也能使方程组的求解更直接,易知 $b_n=0$.当然(*)式可以化为 $\frac{1\times 2}{2}b_{n-k+1}+\frac{2\times 3}{2}b_{n-k+2}+\cdots+\frac{(k-1)k}{2}b_{n-1}+\frac{k(k+1)}{2}b_n+\frac{k(k-1)}{2}b_{n+1}+\cdots+\frac{3\times 2}{2}b_{n+k-2}+\frac{2\times 1}{2}b_{n+k-1}=0(k\geqslant 2)$.更详细的可以看一下书籍《线性代数》,大学里要花大半学期才能讲解清楚的内容,有兴趣的可以继续深入研究,还可以利用美国mathworks公司发布的代表当今国际科学先进水平的计算软件MATLAB(matrix&laboratory两个词的组合,意为矩阵工厂)来研究. F

(上接第24页)冲突,还要给予学生充足的时间和空间.

由于开放情境的结论不确定,有多种可能,因此学生有话说,有问题提,之后容易碰撞出火花,培养了学生的求异、求新思维,也培养了学生思维的广阔性.这样的背景还让学生体会到数学与生活密切相关,能增强学习数学的现实性和必要性,在设计、提出问题过程中,学生还要考虑如何用文字表达问题及问题是否符合实际情况等.当然,在设计开放情境时,教师可以先提供一个有价值的数学问题,然后鼓励学生在原有问题的基础上提出一个变化的或拓展的数学问题.

在数学教学中,精心创设问题情境,培养学生观察、发现问题,设计、提出问题,分析、解决问题的能力,使学生真正置身于弗赖登塔尔倡导的数学再创造中,从而提升学生的逻辑推理、数学建模等核心素养.

参考文献:

[1]李沐慧.培养学生提出问题能力的意义及策略[J].教育研究与评论,2017(2).

[2]于文华.美国小学数学教学中的问题提出及启示[J].数学教育学报,2018(10).

[3]阙东进.培养高中生发现和提出数学问题能力的教学实践与思考[J].中学数学月刊,2018(11).

[4]石志群.基于"学生提出问题"的数学教学[J].江苏教育,2018(9). F